

7 Relativité Générale

7.1 Eddington-Robertson

Dans la paramétrisation d'Eddington-Robertson au premier ordre,

$$ds^2 = (1 + 2\alpha \frac{V}{c^2})c^2 dt^2 - (1 - 2\gamma \frac{V}{c^2})(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

calculez $R_{\mu\nu}$ et R , $R^{\mu\nu} \nu_{\mu} \nu_{\nu}$, $\nu^{\mu} \nu_{\mu}$

7.2 Equations d'Einstein linéarisées

Pour une métrique linéarisée, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}(x)$,

1. calculez la métrique inverse $g^{\mu\nu}$,
2. calculez la forme générale des symboles de Christoffel,
3. calculez la forme générale du tenseur de Ricci,
4. comme la métrique linéarisée garde cette forme sous translations infinitésimales (soit quatre paramètres), on impose les conditions suivantes sur $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\partial_{\rho} \varepsilon^{\rho\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\nu} \partial_{\rho} \varepsilon^{\alpha}_{\alpha},$$

montrez alors que les équations d'Einstein se ramène à une équation d'onde pour $\varepsilon_{\mu\nu}$.

7.3 Schwarzschild extérieure

Il s'agit de calculer la métrique à l'extérieur d'une étoile. Celle-ci est considérée en première approximation comme sphérique. La forme la plus générale pour l'élément de longueur à 4 dimensions possédant la symétrie sphérique est :

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où $\nu = \nu(t, r)$ et $\lambda = \lambda(t, r)$ sont des fonctions arbitraires de r et t .

1. Justifiez l'expression de ds^2 .
2. Calculez $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ et g .
3. Calculez $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$.
4. Calculez $R_{\mu\nu}$.
5. Prouvez le théorème de Birkhoff : toute solution à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide est statique. Il faut donc prouver qu'il est possible de définir $\nu = \nu(r)$ et $\lambda = \lambda(r)$.
6. Déterminez les solutions à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide (solutions de Schwarzschild).

7. Lien entre $\varepsilon_{\mu\nu}$ et Schwarzschild

lien avec la conservation de l'énergie
 → qui donne grav. monopolaire

7.4 Matière sombre et constante cosmologique.

On observe que la vitesse de rotation d'une étoile autour du centre de sa galaxie devient approximativement indépendante du rayon de sa trajectoire quand celui-ci devient grand ($r \gtrsim 50\,000$ années-lumière).

1. Quelle est la prédiction de la gravitation newtonienne ?
2. La relativité générale est en accord avec Newton pour des effets de champ faible. Elle ne résout donc pas le problème. C'est ce qui mène à postuler la présence de matière supplémentaire dans la galaxie, encore non observée, appelée *matière sombre*.

Une autre possibilité serait l'introduction d'une constante cosmologique. Résolvez l'équation d'Einstein munie d'une constante cosmologique non nulle pour trouver les solutions à symétrie sphérique :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 .$$

(Utilisez les calculs de l'exercice 7.3).

3. Que devient le potentiel de Newton si $\Lambda \neq 0$?

Calculez la valeur de Λ nécessaire pour expliquer les observations. On peut supposer que la majeure partie de la masse de la galaxie est concentrée dans son noyau ($M \simeq 10^{11} \times$ masse du soleil). *Comparaison avec constante avec l'approximation de la cosmologie*

4. *chez bangin g(z) = 1/(1+z)^2*

7.5 Solution de Schwarzschild en présence de matière ("Schwarzschild intérieur").

1. Quel est le tenseur énergie-impulsion pour un fluide parfait de densité $\rho(x^\mu)$ et de pression $p(x^\mu)$? Ecrivez les équations de conservation de ce tenseur en fonction de ρ, p et de la métrique de l'exercice 7.3.
2. Soit une boule de rayon r de gaz de poussière, c.-à-d. un fluide parfait où la pression est nulle. Cherchez la solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein si le vide règne à l'extérieur de la boule.
3. Soit un fluide parfait de pression et densité quelconques mais à symétrie sphérique. En utilisant la loi de conservation de l'énergie-impulsion et l'équation d'Einstein, écrivez les équations liant la métrique aux variables $\rho(r), p(r)$ et $m(r)$ où

$$m(r) = \int_0^r \rho(u) 4\pi u^2 du .$$

Montrez que ces 3 variables sont liées par 2 équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho , \\ \frac{dp}{dr} &= -G \frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2Gm)} . \end{aligned}$$

Note : Pour résoudre ce système, on a besoin d'une équation supplémentaire, l'équation d'état $p = p(\rho)$, ainsi que de conditions frontières. On peut alors résoudre les équations en donnant la métrique en fonction de p, ρ, m . L'équation liant p, ρ et m est appelée équation d'Oppenheimer-Volkoff. Elle est utile pour étudier, par exemple, l'effondrement gravitationnel d'une étoile en un trou noir.

4. Résolvez l'équation d'Oppenheimer-Volkoff en supposant que la densité ρ est constante pour $r < R$ et nulle pour $r \geq R$, où R est le rayon de l'étoile. C'est la solution de "Schwarzschild intérieur". Vérifiez la continuité avec "Schwarzschild extérieur" à la surface de l'étoile.

7.6 Tenseur de Weyl.

1. Calculez le tenseur de Weyl pour la métrique à symétrie sphérique donnée à l'exercice 7.3.
2. Vérifiez que la solution de Schwarzschild intérieur (cf exercice 7.5) est conformément plate.

7.7 L'horizon est-il une singularité ?

1. Ecrivez la solution de Schwarzschild en coordonnées isotropes, par le changement de variable :

$$r_S \equiv r_I \left(1 - \frac{V(r_I)}{2c^2} \right)^2 ,$$

où r_S est la variable r dans la métrique de Schwarzschild et V le potentiel gravitationnel de cette même métrique.

2. Déterminez les facteurs (α, β, γ) en comparant le résultat obtenu en 1 avec la métrique de Eddington-Robertson.
3. Que devient l'horizon de Schwarzschild en coordonnées isotropes ?

4. *R ? R < R_s ?*

7.8 Contrainte des tests classiques sur la constante cosmologique.

Soit un espace-temps vide à symétrie sphérique en présence d'une constante cosmologique Λ , dont on a calculé la métrique à l'exercice 7.4.

1. Ecrivez l'équation des géodésiques.
2. Quelle est l'équation du mouvement d'une particule massive ?
Le déplacement du périhélie est-il modifié par rapport au cas $\Lambda = 0$?
3. Quelle est l'équation du mouvement d'un photon ? La déflexion de la lumière est-elle plus ou moins importante que si $\Lambda = 0$?
4. D'après les résultats obtenus ci-dessus, donnez une limite sur Λ .

7.9 Chute libre dans un trou noir.

Une particule massive est initialement au repos en $r = r_0$ par rapport à un trou noir, décrit par la métrique de Schwarzschild. Elle est lâchée et tombe en chute libre dans le trou noir, radialement.

1. Quel temps propre s'écoule avant qu'elle n'atteigne la singularité en $r = 0$?
2. Quel temps de coordonnée s'écoule avant qu'elle n'atteigne l'horizon ?

7.10 Orbites circulaires.

1. Etablissez l'équation des géodésiques d'une particule massive dans un potentiel de Schwarzschild.
2. En écrivant l'équation de la trajectoire comme une somme $E_p + E_k = \text{const.}$, déterminez la condition d'existence d'orbites circulaires, leurs rayons ainsi que leur stabilité ou instabilité.
3. Montrez que la loi de Kepler

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

est vérifiée pour les orbites circulaires de Schwarzschild si T est la période calculée à l'infini.

7.11 Les trois faux jumeaux.

Jean-Marc est en orbite circulaire dans un potentiel de Schwarzschild.

1. Calculez la période de révolution de Jean-Marc en fonction du rayon de l'orbite et de la masse à la source du potentiel.
2. Jean-Marc veut montrer comme il tourne vite et envoie un signal après chaque tour à Jacques qui se repose à l'infini. Mais quel intervalle de temps va donc mesurer Jacques entre deux signaux ?
3. Jean est à califourchon sur une fusée qui le maintient immobile en un point de l'orbite de Jean-Marc. Combien de temps s'écoule-t-il pour lui entre deux passages successifs de son collègue mais néanmoins ami ?
4. Calculez Δt en secondes si Jean-Marc se trouve à $r = 6GM/c^2$ et si $M = 14 M_{\text{soleil}}$. On s'attend à ce que le spectre de rayons X de la source Cygnus X-1 présente au minimum une telle fluctuation. Est-il possible de le justifier ?
5. Si Jacques vieillit de 40 ans, de combien d'années aura vieilli Jean-Marc ?

7.12 Capture de la lumière par un trou noir.

1. Calculez l'équation des géodésiques pour la déflexion de la lumière par un objet massif (potentiel de type Schwarzschild). Utilisez les coordonnées de Schwarzschild.

- Déterminez les orbites circulaires. Sont-elles stables ?
- Quel est le paramètre d'impact en-dessous duquel un photon venant de l'infini sera capturé ? Calculez la section efficace de capture de la lumière par un trou noir.

7.13 Solution de Reissner-Nordström.

Il s'agit de calculer la métrique autour d'une masse ponctuelle chargée. Il y a donc symétrie sphérique. On suppose que la solution est statique et asymptotiquement plate, c.-à-d. que la métrique tend vers la métrique de Minkowski loin de la masse. La solution de Schwarzschild est un cas particulier quand la charge est nulle.

- Que deviennent les équations de Maxwell en présence de gravitation ?
- Choisissez un repère tel que la particule est au repos à l'origine.
Calcule $F^{\mu\nu}$.
Résolvez les équations de Maxwell, c.-à-d. trouvez le champ électromagnétique à une distance quelconque de la charge.
- Le tenseur énergie-moment électromagnétique s'écrit :

$$T_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} .$$

Résolvez l'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ (On peut poser $G = 1$).

7.14 Chute libre dans un trou noir chargé.

Décrivez le mouvement d'une particule neutre massive en chute radiale dans un trou noir chargé.

7.15 Equations de Friedmann-Lemaître.

La métrique pour un espace homogène et isotrope (métrique de Robertson-Walker), utilisée en cosmologie, s'écrit en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right\} .$$

Elle peut se réécrire :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) g_{ij} dq^i dq^j$$

où g_{ij} est la métrique de l'espace à 3 dimensions, indépendante du temps. Calculez les équations de Friedmann-Lemaître, en insérant cette dernière métrique dans l'équation d'Einstein, en présence d'un fluide parfait.

lien avec 7.13.3

7.16 Modèle cosmologique anisotrope.

Soit la métrique définie par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - t^{2p_1} dx_1^2 - t^{2p_2} dx_2^2 - t^{2p_3} dx_3^2$$

où p_1, p_2, p_3 sont des constantes.

- Calculez les composantes du tenseur de Ricci.
- Montrez alors que l'équation d'Einstein en l'absence de source n'admet pas de solution 3-isotrope.
- Prouvez que la solution anisotrope du type $p_1 = p_2 \neq p_3$ est unique si nous imposons un tenseur de Weyl non nul.

7.17 Derniers exercices proposés

1. Montrez que la contrainte radiale de Bianchi

$$T^r{}_{|\nu} = 0$$

implique l'équation d'équilibre de Tolman-Oppenheimer-Volkov

$$p' = -(\rho c^2 + p)\nu'.$$

2. Calculez les équations de Friedmann-Lemaître à partir de la métrique de Robertson-Walker.
3. Soit la métrique suivante dans un univers vide de matière :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2(t) dx_i^2,$$

- (a) À partir des équations de la relativité générale, déterminez $a_i(t)$ en fonction du temps.
- (b) Si on inclut une constante cosmologique dans les équations d'Einstein, montrez qu'il n'est alors plus possible de trouver une solution.