

6 Géodésiques

6.1 Géodésiques par principe variationnel

Dans un espace-temps muni d'une métrique quelconque $g_{\mu\nu}(x)$, dérivez l'équation du mouvement d'une particule libre par principe variationnel appliqué à l'élément de longueur :

$$\delta \int (-mc) ds = 0,$$

où $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$.

Les trajectoires correspondant à l'équation ainsi obtenue s'appellent des géodésiques.

6.2 Précession géodésique d'un gyroscope

On considère un gyroscope en orbite circulaire ($r = r_0$) autour d'une masse M . Le vecteur S^μ représente le spin (rotation) du gyroscope. Le vecteur u^ν représente la vitesse du gyroscope. Le système est régi par les deux équations suivantes,

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu S^\rho u^\sigma = 0,$$

$$g_{\mu\nu} S^\mu u^\nu = 0,$$

soit le transport parallèle de S^μ le long de l'orbite et l'orthogonalité entre S^μ et u^ν . En travaillant dans le plan et en utilisant la métrique d'Eddington-Robertson en coordonnées polaires, montrez que l'axe de rotation du gyroscope précède.

6.3 Géodésiques affines et métriques

Soit une courbe paramétrisée par $x^\alpha = f^\alpha(\lambda)$. Le vecteur tangent à la courbe au point P est

$$\left. \frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda} \right|_P \equiv u^\alpha(P).$$

Il existe une courbe telle que le vecteur tangent en un point P quelconque, transporté parallèlement au point Q , est parallèle au vecteur tangent à la courbe en Q .

1. Etablissez l'équation de cette courbe :

$$u^\alpha u^\beta_{|\alpha} = g(\lambda) u^\beta.$$

Note : Cette courbe est appelée *géodésique affine*.

2. Si on prend une connexion conservant les longueurs et $d\lambda$ comme élément de longueur (c.-à-d. $d\lambda = ds$ où $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$), montrez que l'équation des géodésiques devient :

$$u^\alpha u^\beta_{|\alpha} = 0.$$