La théorie des voûtes de Pierre Bouguer : jeu mathématique et enjeu pratique

P. Radelet-de Grave

Nantes, le 6 juin 1998

Introduction

L'histoire de l'architecture est un lieu intéressant pour observer les liens entre science et expérience car elle peut donner l'exemple d'une construction scientifique *a posteriori*. Lorsqu'en 1734, Bouguer écrit, le dôme de Santa Maria del Fiore est construit à Florence par Brunelleschi depuis plus de 300 ans, la construction du Dôme de Saint-Pierre de Rome par Michel-Ange remonte à 150 ans environ et Wren a terminé la construction de la cathédrale Saint. Paul à Londres.Ce n'est qu'en 1695, que Philippe de la Hire théorisa pour la première fois l'équilibre de la voûte en arc et Bouguer fut le premier auteur à affronter le problème des dômes.

Comment se comporte une science qui surgit après de telles réussites ? Comment organise-t-elle l'épreuve des connaissances empiriques qui ont été emmagasinées et du savoir-faire transmis sur les chantiers ?

Le texte sur les voûtes dans l'œuvre de Bouguer

Lorsqu'il écrit son traité sur les voûtes en dôme, Bouguer a 36 ans et ses réflexions se sont surtout tournées, sous l'influence des questions proposées pour le prix de l'Académie de Paris, vers les domaines d'application liés à la navigation. Domaines vastes et variés allant des mesures astronomiques[1] pour déterminer l'heure en mer, de la mesure de la déclinaison magnétique[2] dans l'espoir de mieux se situer en mer jusqu'au calcul des mâts de navire[3] ou encore aux *lignes de poursuite* décrites par un navire à la chasse d'un autre[4]. Dans ce dernier texte, une motivation probable de Bouguer s'exprime, à savoir le jeu mathématique de l'analyse des courbes. Le problème physique, le bateau qui en poursuit un autre et qui génère ces courbes, n'apparaissant que comme un prétexte.

---

1 [P. Bouguer, 1729.]
2 [P. Bouguer, 1731.]
3 [P. Bouguer, 1727.]
4 [P. Bouguer, 1732.]

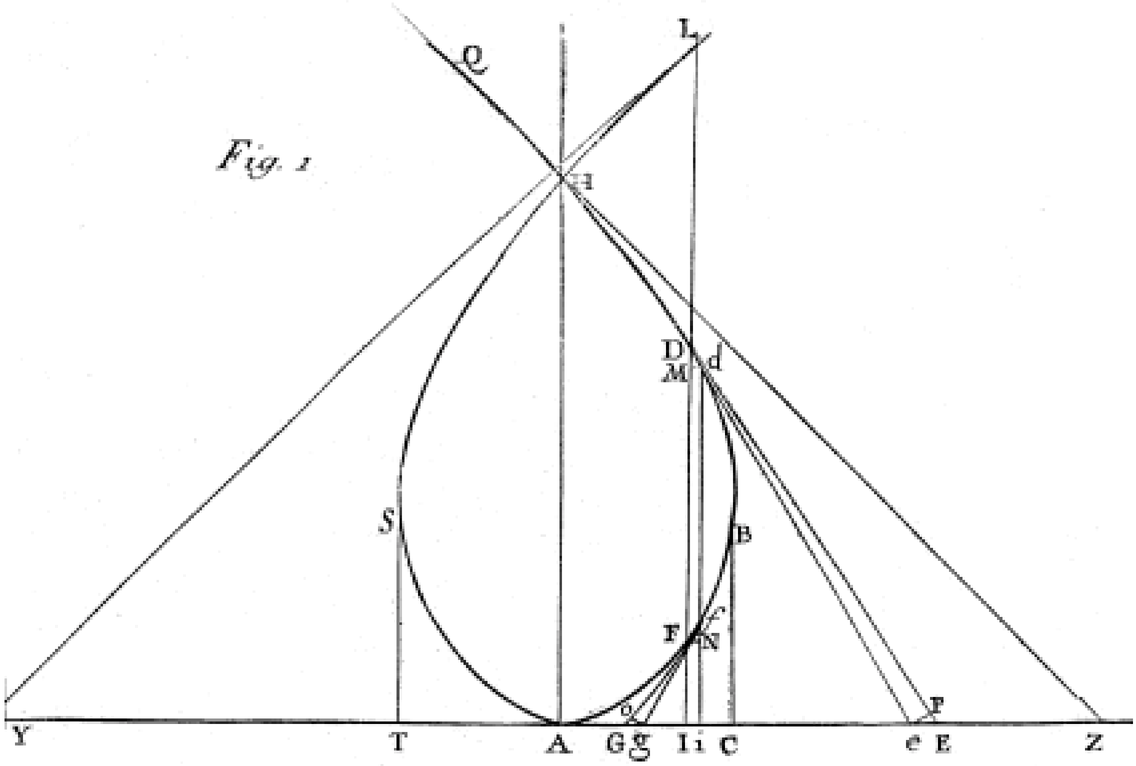


Fig. 1

Depuis qu'on trouve avec plus de facilité les symptômes de toutes les lignes courbes, la découverte même de ces lignes n'attire plus la même attention. Mais on doit cependant continuer à remarquer celles qui ont des propriétés curieuses, celles principalement qui formant des familles entières, ou qui étant susceptibles d'une infinité de genres, sont en même temps rectifiables, & qui ne renferment que des espaces dont on peut avoir la quadrature, écrit Bouguer au seuil de son article avant même de justifier, par une description physique, le nom des courbes reprises sur la figure 1. Il nomme *lignes de poursuite*[5], les courbes qu'il va étudier.

De la même manière, depuis que l'on sait que la voûte infiniment mince la plus stable sous son propre poids est la chaînette renversée, l'étude de cette courbe a fait couler beaucoup d'encre. L'envie de généraliser à des voûtes d'une certaine épaisseur peut donner lui aussi lieu à une étude de familles de courbes.

[5] *On peut donner à ces courbes le nom de lignes de poursuite, parce qu'elles sont décrites par le mouvement uniforme d'un point qui en poursuit un autre. Considérées sous cette idée, on voit qu'elles sont tracées presque tous les jours, & elles l'étoient le temps passé encore plus souvent, lorsqu'on commettoit fréquemment cette faute dans la Marine, de diriger exactement la Prouë vers les Vaisseaux ausquels on donnoit chasse. Aussi-tôt que le Navire qui poursuivoit l'autre, n'étoit pas situé sur la route que suivoit ce dernier, il étoit obligé de se détourner sans cesse de la ligne droite, & de décrire la courbe dont il est ici question.*, [P. Bouguer, 1732, p. 2.]

On peut remarquer dans le travail du chevalier de Nieuport[6], écrit 44 ans après celui de Bouguer que le problème des voûtes n'est que le prétexte d'une étude purement mathématique. Il est difficile d'imaginer que toutes les courbes trouvées par de Nieuport et reprises dans la fig. 2 permettent de réaliser des voûtes.

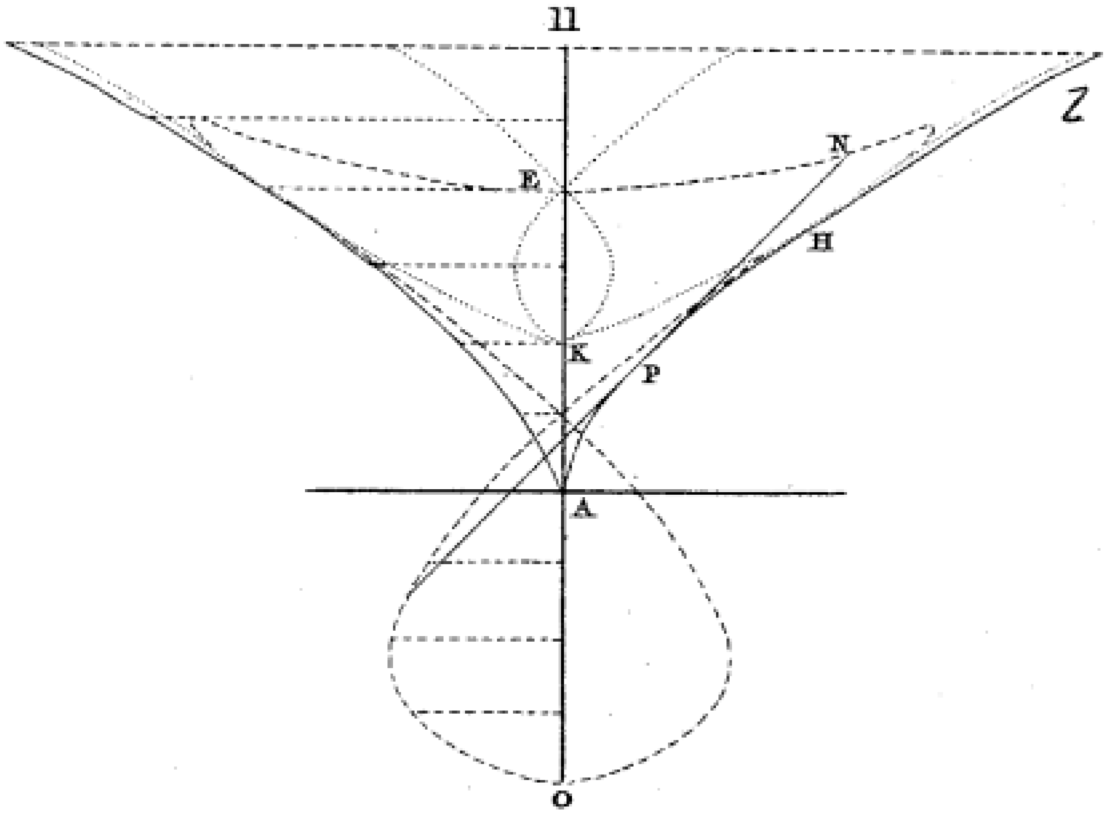


Fig. 2

Le but poursuivit par Bouguer est du même ordre qui insiste dès le début de son texte sur les dômes :*je montrerai qu'une infinité de lignes courbes sont propres à former ces sortes de Voutes.* Pourtant ce serait aller un pas trop loin que de dire qu'il s'agit d'un pur jeu mathématique. Car c'est précisément là que se situe notre homme, entre cette recherche purement théorique, ce jeu mathématique et un objectif pratique, la construction d'une voûte ou le dessin de la carène d'un navire. Comme il le fera dans son *Traité du navire* publié, après son retour du Pérou.

---

[6] [Ch. de Nieuport, 1778.]

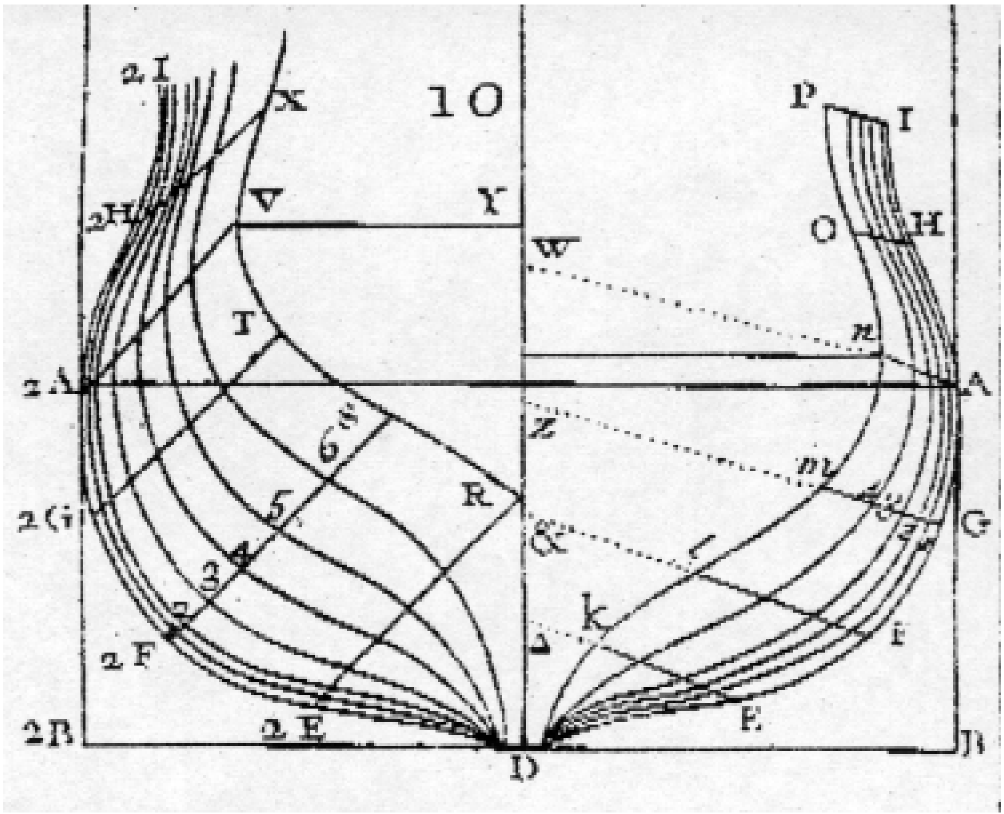


Fig 3

Les constructions navales[7]. fournissent un autre exemple de développement historique comparable à celui de l'architecture des voûtes puisqu'elles précèdent elles aussi de beaucoup leur théorie.

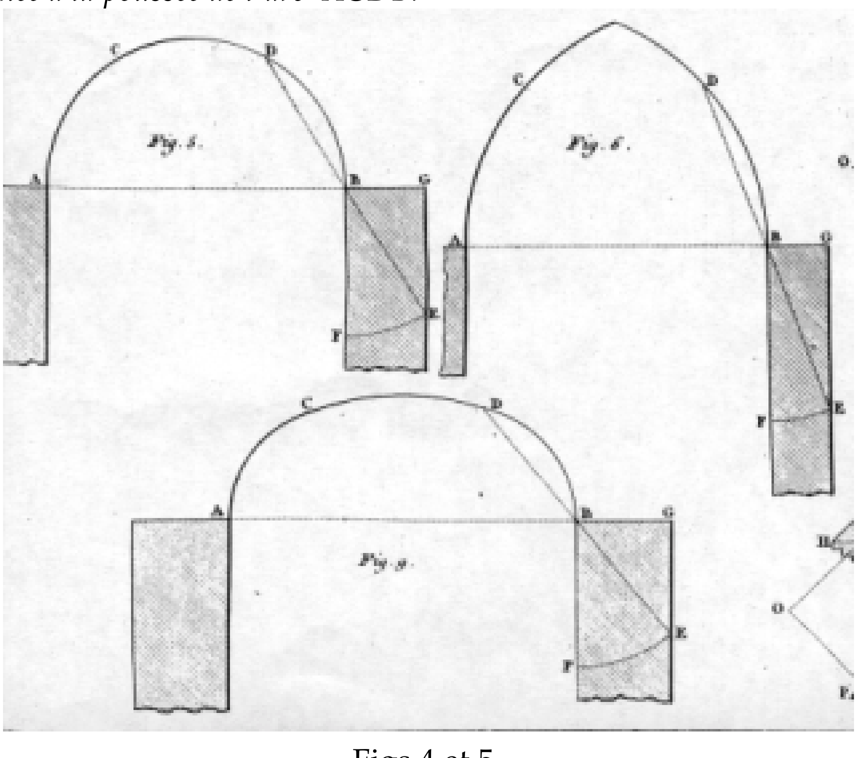
L'histoire du calcul des dômes

Plusieurs personnes, dit Bouguer en commençant son travail sur les voûtes, *ont traité avec beaucoup de soin des Voutes en simple Arc : les derniers Volumes des Mémoires de l'Académie contiennent d'excellents morceaux sur cette matiére, entre lesquels on doit citer avec distinction ceux de M. Couplet. Il ne reste que les Voutes en Dome que personne, que je scache, n'a examinées*[8].

A cette époque, l'analyse scientifique même de la simple voûte en arc est très récente. Cette analyse est précisée par Belidor, cinq ans avant Bouguer, dans le deuxième livre de sa *Science des ingénieurs, qui traite de la mécanique des voutes : on conviendra sans doute qu'il y a une méthode pour considérer les sujets qui se rapportent à l'architecture, par laquelle on est sûr de ne pas donner dans le faux,*

7 [P. Bouguer, 1746]
8 [P. Bouguer, 1734 , p. 149.]

dès qu'on saura se servir heureusement des connaissances acquises par l'étude des mathématiques. Les principes qu'elles nous présentent sont d'une si grande fécondité, qu'il n'y a rien à quoi ils ne soient applicables, principalement ceux de la mécanique. C'est vainement qu'on voudra nous persuader que la pratique abandonnée à elle-même peut arriver au point de perfection : l'expérience prouve souvent le contraire, et j'en vais faire voir un exemple au sujet des voûtes, qui viendra fort à propos pour faire sentir combien il est de conséquence de ne pas suivre sans examen les principes qui ne sont autorisés que par l'usage.[9] Il en viendra ainsi à critiquer la construction largement utilisée mais simpliste et surdimensionnée qui donne l'épaisseur du *pied droit* et qu'il attribue à Blondel. Elle a en fait été publiée pour la première fois en 1643 par le jésuite François Derand[10] et reprise par Belidor en 1729 : *Partagez l'arc en trois parties égales,* explique ce dernier *et menant une des cordes par le point de l'imposte, prenez en dehors sur la même continuée, une ligne qui lui soit égale; la droite menée à plomb par l'extrémité de cette ligne déterminera l'épaisseur du piédroit; comme si, divisant l'arc ACDB en trois parties égales aux points CD, je mène la corde DB passant par le point de l'imposte en B, je n'ai qu'à prendre en dehors sur la même droite, continuée, la partie BE égale à BD, et menant les deux perpendiculaires EG et BF, elles détermineront l'épaisseur du piédroit BGEF, qui sera proportionnée à la poussée de l'arc ACDB.*[11]



Figs 4 et 5.

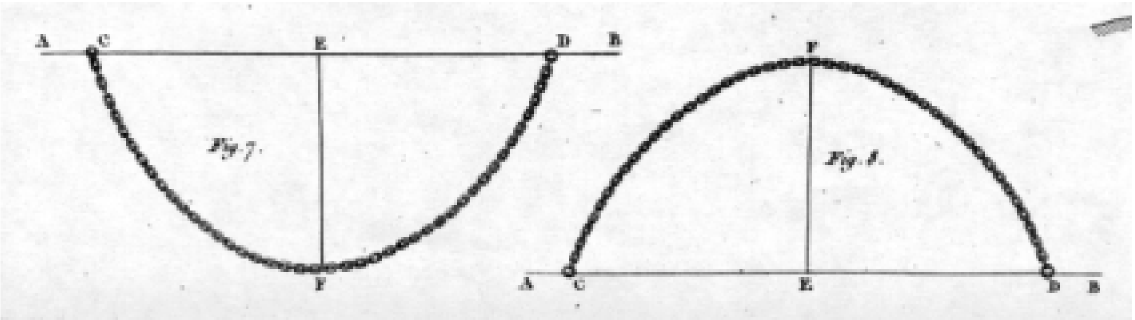
---

[9] [B. de Belidor, 1830, p. 100.]

[10] [F. Derand, 1643, p. 16.]

[11] [B. F. de Belidor, 1830, p. 106.]

Belidor accorde la plus grande importance au problème du dimensionnement des piédroits et, il adjoint un chapitre sur *la courbe qu'il conviendrait de donner à une voûte, pour que, tous les voussoirs étant égaux en pesanteur, ils fussent en équilibre*[12]. Il explique que c'est aussi la courbe adoptée par une chaînette sous son propre poids.



Figs 6 et 7.

Belidor donne ce résultat, qui avait déjà été proposé par Hooke[13] en 1678 sous la seule justification mécanique suivante : *on sait qu'on ne dérange rien dans l'équilibre des puissances en changeant seulement leur direction en son contraire.*[14] Ce même résultat avait été signalé par Gregory dans son article sur la Caténaire[15] et il a été démontré analytiquement dans le cas d'une voûte infiniment mince par Jacob Bernoulli, à la fin de sa vie en 1705, dans l'une de ses dernières *Meditationes*[16] qui ne fut publiée qu'en 1744 dans ses *Opera* parmi les *Varia Posthuma*. Il est donc probable que ni Belidor, ni Bouguer qui pourtant était en relation avec la famille Bernoulli, n'aient eu connaissance de ce travail. En tout cas, Belidor ne dispose que d'une méthode pratique pour tracer cette courbe :

12 [B.F. Belidor, 1830.]
13 C.A. Truesdell, Introduction aux *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. II, vol. 11 pars secunda, Turici, 1960, p. 57.
14 [B. F. de Belidor, 1830, p. 148.]
15[D. Gregory, 1697.]
16 [Jacob Bernoulli, 1744.]

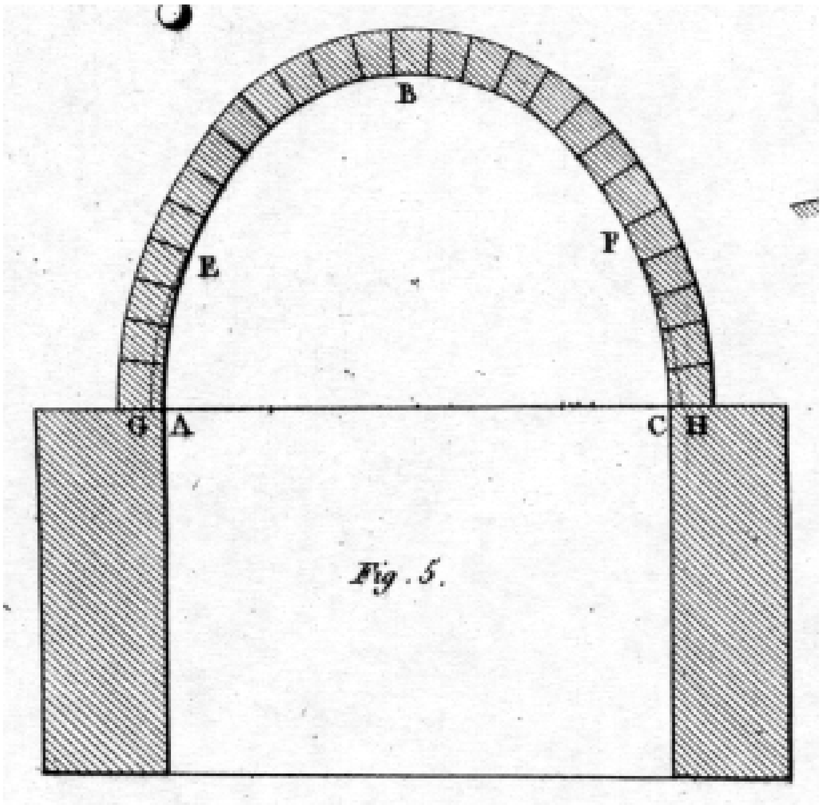


Fig. 8

Si l'on veut construire une voûte naturelle dont la largeur et la hauteur soient données, il faut sur une surface verticale tracer une ligne CD égale à la largeur de la voûte, abaisser du milieu de cette ligne une perpendiculaire EF égale à la hauteur qu'on veut lui donner, ensuite attacher l'extrémité d'une chaîne au point C, et porter l'autre extrémité vers D, de manière qu'en augmentant ou diminuant la chaîne, son propre poids la fasse passer par le point F lorsqu'elle sera arrêtée aux endroits C et D. Après cela, on pourra, avec un crayon que l'on conduira tout au long de la chaîne (sans pourtant la faire vaciller), tracer une courbe, et là-dessus établir la figure du faux cintre de la voûte, la coupe des voussoirs et le reste.[17]

Pour des raisons esthétiques, Belidor n'hésite d'ailleurs pas à corriger la courbe ainsi obtenue (cf. les pointillés de la fig. 8) : *si l'on voulait faire usage de cette courbe, je crois qu'on serait obligé de rapprocher ses deux extrémités G et H, afin qu'elles fussent disposées comme EA et FC, et non pas comme EG et FH, ce qui ne conviendrait pas dans l'exécution, à cause que la naissance de la voûte ferait un jarret avec le piédroit, ce qui choquerait la vue. Il est bon de profiter de ce que la théorie peut enseigner; mais quand il s'agit de la pratique, on peut sans scrupule ne la pas suivre exactement pour rapporter les choses à l'usage.*[18]

---

[17] [B. F. de Belidor, 1830, p. 149-150.]
[18] [B. F. de Belidor, 1830, p. 149.]

Le travail de Bouguer

Le problème de l'arc est un problème à deux dimensions. Bouguer se propose de passer à trois dimensions, en recherchant la courbe dont la révolution donnera le dôme le plus stable sous son propre poids. Son travail se découpe *grosso modo* en trois parties. Dans la première, il étudie les conditions de stabilité au moyen de la loi du parallélogramme des forces. Pour ce faire, il simplifie le problème de la manière suivante *BbA* (Fig.9*) est la courbe qui forme le Dome par sa révolution autour de son axe, la verticale AD. Cette ligne courbe passe dans tous les points B, b, &c. par le milieu de l'épaisseur KL, HI, &c. de la Voute, épaisseur que nous regardons ici comme très petite, & qui l'est toujours en effet par rapport aux dimensions du Dome. Tous les joints, comme KL, HI, &c. des Voussoirs sont aussi supposés ici perpendiculaires à la même courbe BbA, comme ils le sont ordinairement.*[19] Ces éléments viennent s'ajouter à la remarque qui précède : *Je supposerai toûjours que les pierres ou les Voussoirs ont leurs surfaces infiniment polies*[20] pour former son modèle du dôme idéalisé.

Si l'on considère après cela une partie HAh du Dome, il est évident qu'elle poussera tous les Voussoirs HL qui sont immédiatement au dessous, selon la perpendiculaire bC au joint HI, ou selon le prolongement du petit côté bb de la courbe. Mais à mesure qu'on considérera des points plus bas, la direction doit changer, parce que la pesanteur de chaque assise s'adjoûte successivement à l'effort que fait la partie supérieure. Cette partie pousse au point b selon bC, & l'effort est exprimé, si on le veut, par bC même. Mais si l'on suppose toute la pesanteur du Voussoir HL réunie dans le point b, ce qu'il est permis de faire aussi-tôt que l'épaisseur Bb des Voussoirs est infiniment petite, on n'aura qu'à représenter cette pesanteur par la petite partie verticale bF; & si on la compose avec l'effort bC que fait la partie supérieure, on aura dans la diagonale bG du parallelogramme CbFG la direction de l'effort total que fait la partie suppérieure augmentée par en bas d'une assise c'est-à-dire, l'effort que fait toute la partie KAk. La direction de la pression se trouve ainsi continuellement détournée; elle forme une courbe , qui peut se confondre avec la courbe AbbB, mais qui peut aussi en être différente, comme elle l'est ici.[21]

---

19 [P. Bouguer, 1734, p. 149.]
20 [P. Bouguer, 1734, p. 149.]
21 [P. Bouguer, 1734, p. 149-150.]

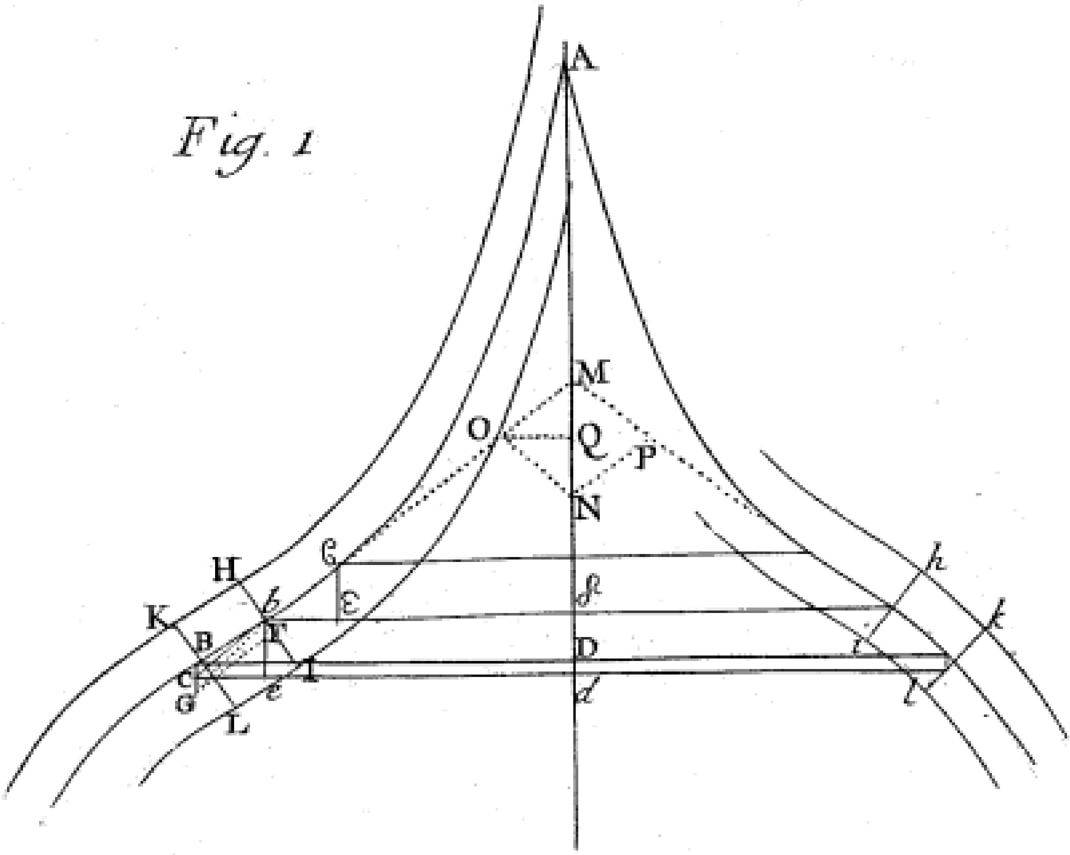


Fig ç

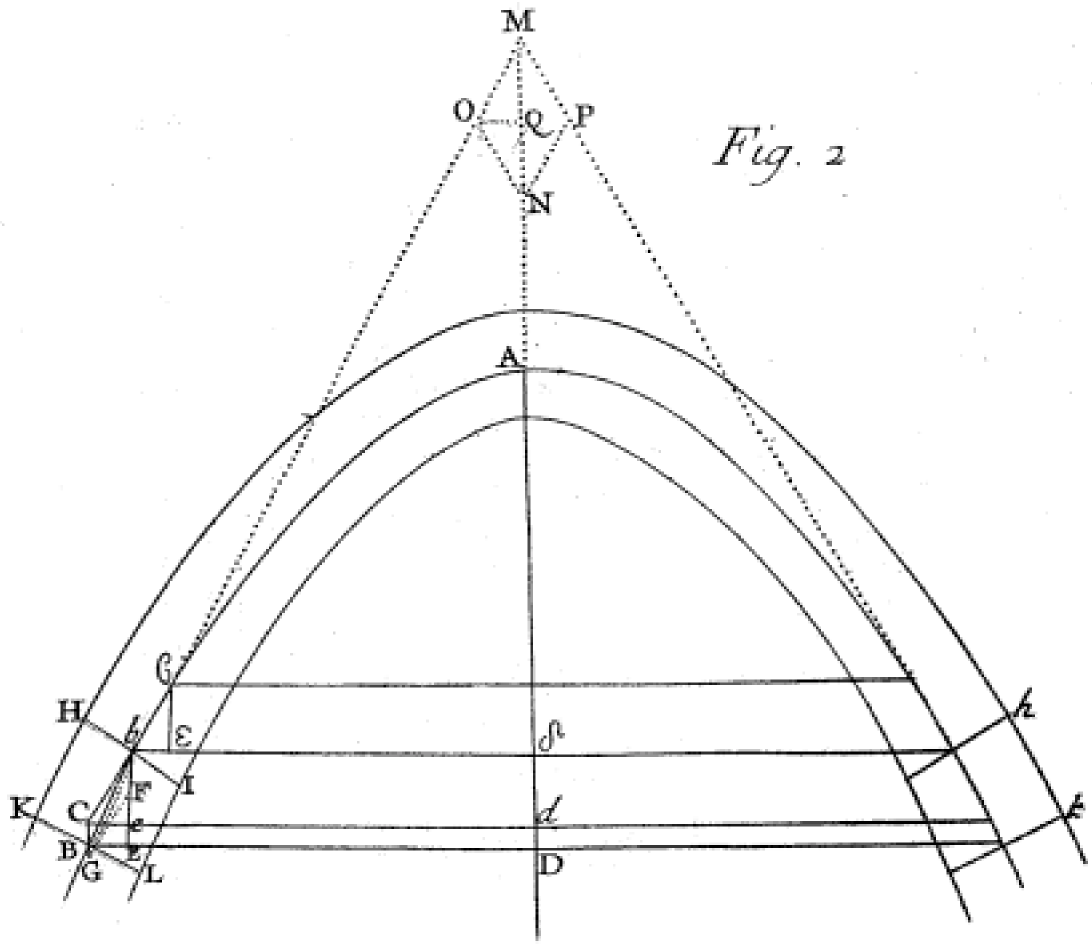


Fig 10

Il considère alors trois cas : la voûte concave, le cône et la voûte convexe. Il est amusant de constater que Bouguer est le seul, à ma connaissance, à considérer des voûtes concaves. Si l'on compare le dessin qu'il donne pour les illustrer avec celui des carènes de navire dont il étudie la forme optimale dans son *Traité du navire*[22] on peut soupçonner d'où lui en est venu l'idée.

[22] [P. Bouguer, 1746.]

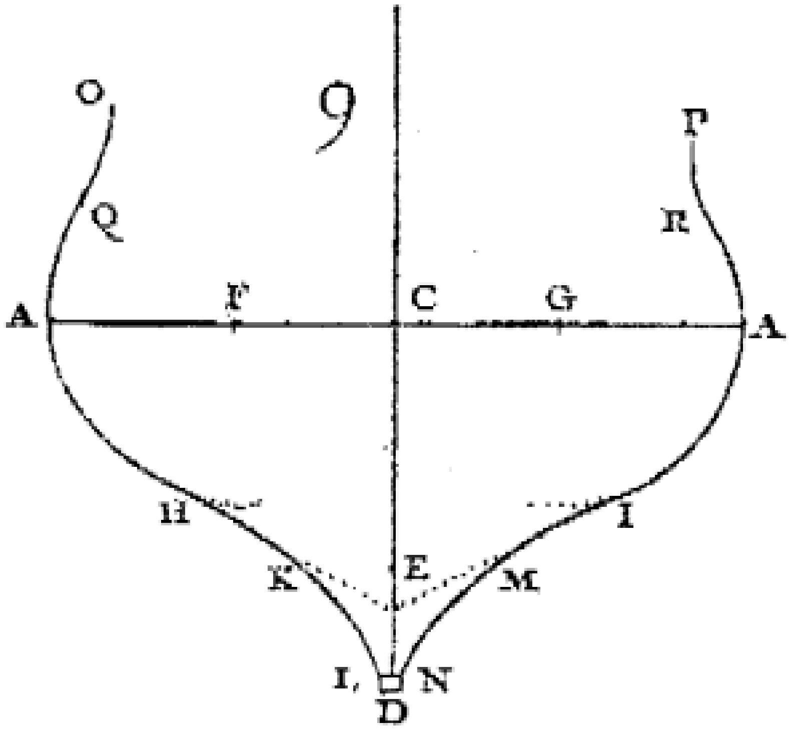


Fig. 11.

Bouguer estime qu'il y a instabilité et même rupture lorsque la résultante appliquée à un voussoir de la poussée totale de la partie supérieure de la voûte (bC) et du poid (bF) du voussoir considéré entraîne le voussoir vers l'extérieur de la voûte. Il n'y a pas de risque dans les voûtes concaves et coniques, la courbe passe toujours audessus de la direction donnée par la poussée et donc *a fortiori* la résultante de cette dernière composée avec la pesanteur du voussoir.

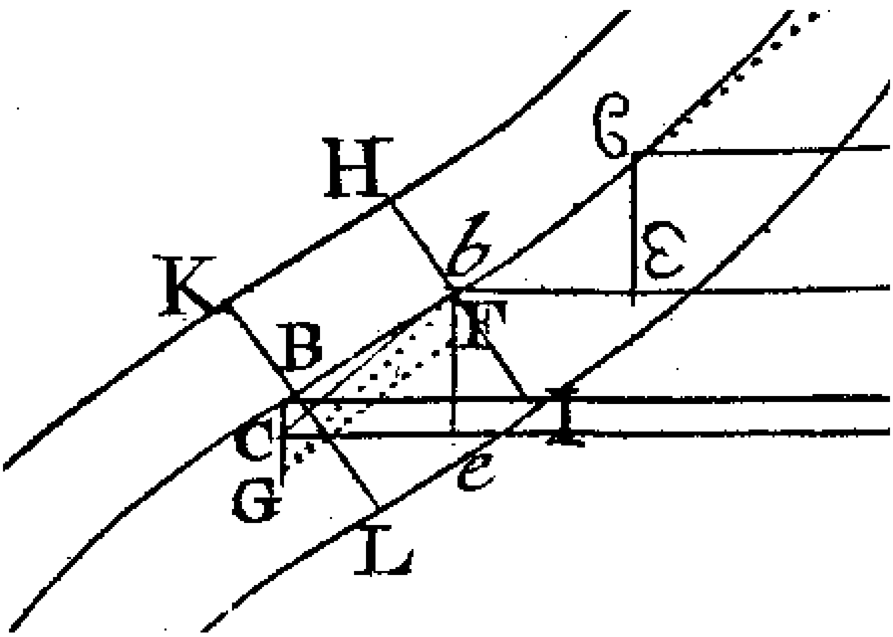


Fig. 12

Ces voûtes sont toujours stables. En 1785, Mascheroni mentionnera ce résultat de Bouguer et en soulignera la pertinence. Dans le cas des voûtes convexes, la courbe passe en dessous de la direction donnée par la poussée.

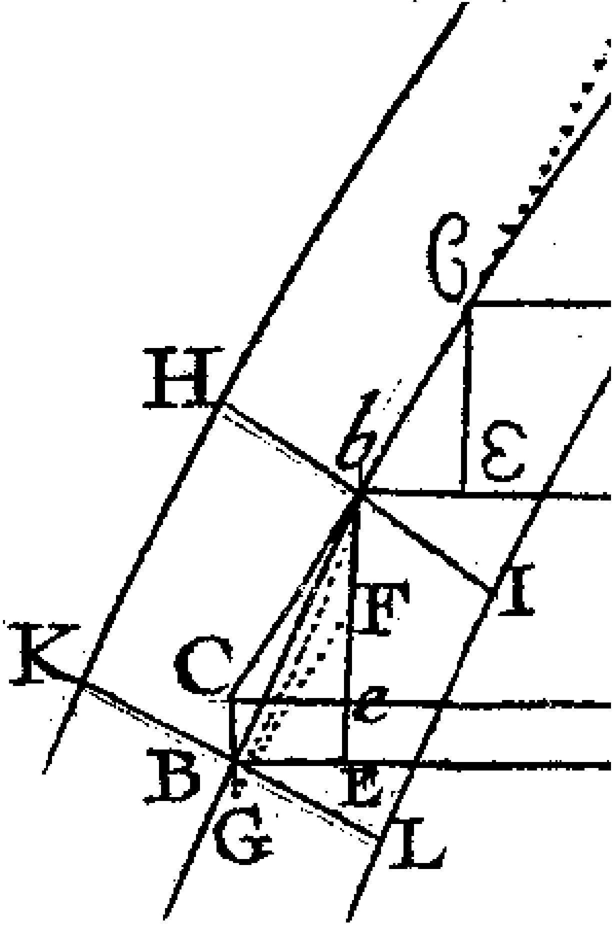


Fig. 13

Dans ce cas, on peut sauver la situation lorsque la résultante (bG) de la poussée totale (bC) et du poids du voussoir (bF) passe sous la courbe. Il exprime cette condition en comparant la distance verticale CG, qui égale bF et CB et demande que CG $\geqq$ CB. eC qui lui donne en exprimant les grandeurs, l'expression analytique :

$$\frac{ey\,dx\sqrt{dy^2 + dx^2}}{\int ey\sqrt{dy^2 + dx^2}} \geqq ddx$$

où e désigne l'épaisseur des voussoirs.

Parmi les courbes qui satisfont cette condition, il recherche, c'est l'objet de la deuxième partie de son travail, la *dernière de toutes* [qui] *a ses petits côtés, comme bB, exactement situés sur les directions bG. les joints verticaux ne supportent dans celle-ci aucune partie de l'effort, puisque les Voussoirs ne sont point poussés en* *dedans. Aussi le moindre agent extérieur est-il capable de renverser cette dernière Voute; & quoiqu'elle se soûtienne, elle est toûjours prête à tomber.*[23] Il recherche à trois dimensions le cas limite correspondant à la chaînette à deux dimensions. L'illustration de ce dernier cas, donnée par Poleni[24] en 1748 est parlant : sa voûte composée de boules est en équilibre mais le moindre souffle la fait s'écrouler.

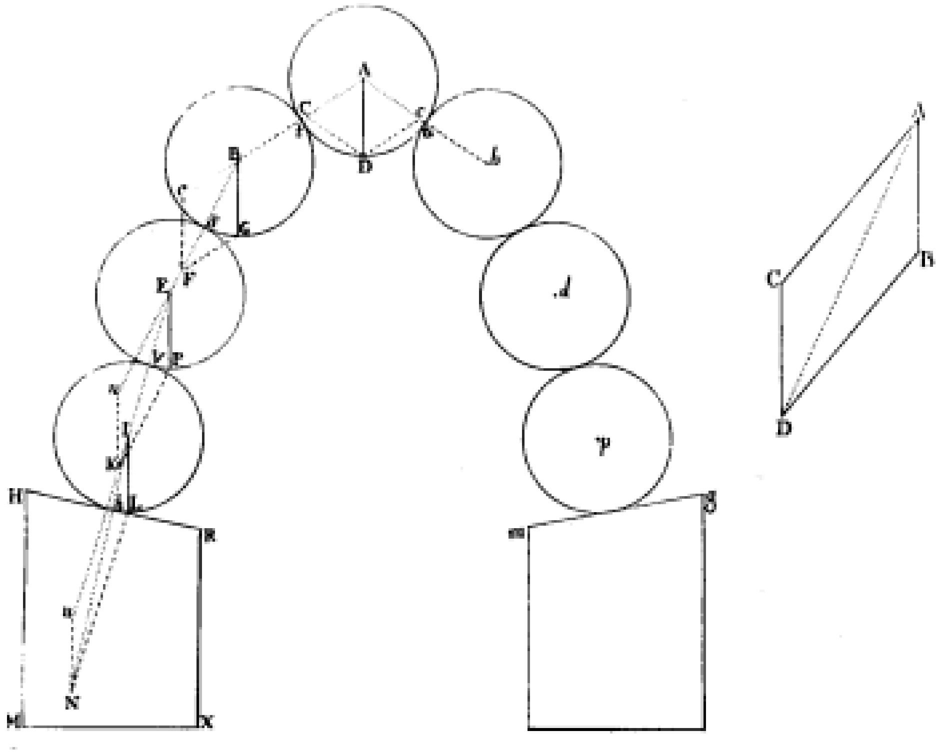


Fig. 12.

Ce cas limite, celui de la courbe la plus convexe qu'il qualifie de *dernière* correspond à l'égalité CG = CB. qu'il s'exprime de la manière suivante:

$$\frac{ey\,dx\sqrt{dy^2 + dx^2}}{\int ey\sqrt{dy^2 + dx^2}} = ddx$$

La troisième partie du texte de Bouguer est consacrée à des applications de la formule

$$\frac{ey\,dx\sqrt{dy^2 + dx^2}}{\int ey\sqrt{dy^2 + dx^2}} \geqq ddx$$

[23] [P. Bouguer, 1734,.p. 152.]
24 [G. Poleni, 1748.]

1° Etant donné la courbe de la voûte comment en déterminer l'épaisseur.

2° Le problème inverse, étant donné l'épaisseur, comment déterminer la courbe.

A propos de ces considérations d'épaisseur de la voûte, Mascheroni[25] marque son désaccord avec Bouguer. Il estime que ce dernier a trop simplifié le calcul des volumes des voussoirs et que la courbe optimale ne passe plus par les centres de gravité. Plus précisément que les centres de gravité ne se trouvent pas là où il le dit.[26]

[25] [L. Mascheroni, 1829.]

[26] Bouguer considère une superposition de parallélipipèdes rectangles. Il faut qu'ils soient incurvés pour former une voûte montre Mascherroni et dans ce cas leur centre de gravité est déplacé.

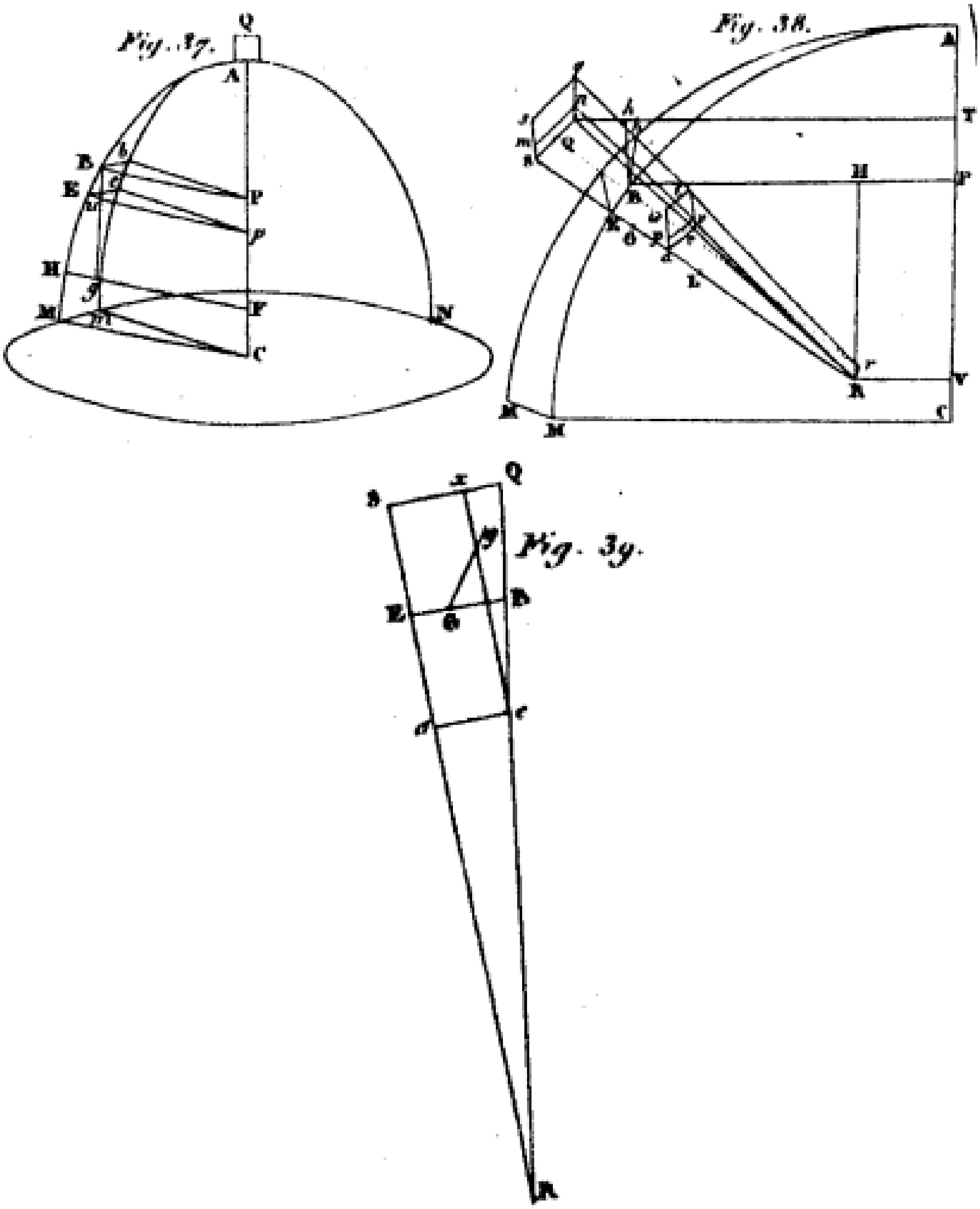


Fig. 13

3° Finalement, pour mieux déterminer la dernière de toutes les courbes qui par rotation engendrent un dôme stable, il sépare les variables de son équation et tente une intégration par série.

Bien que Bouguer ne le souligne pas explicitement, Benvenuto nous fait remarquer que la courbe qu'il trouve est bien l'extension au dôme de l'analogie entre caténaire et arc[27], c'est-à-dire dont l'équilibre est rompu par le plus petit déplacement.

Bossut[28] reprend l'étude du dôme stable sous son propre poids en 1776. Toujours au moyen de la loi du parallélogramme des forces auquel il adjoint le rayon de courbure. Il ne considère pas l'action des voussoirs adjacents et observe que la courbe qu'il trouve n'est pas une chaînette.

Le calcul des voûtes et les principes de la mécanique

le parallélogramme des forces

Nous venons de voir l'usage que Bouguer et Bossut[29] font de la loi du parallélogramme.

---

27 Ed. Benvenuto, *An introduction to the history of structural mechanics*, part II, Vaulted structures and elastic systems, Springer-Verlag, p. 345.

28 [Ch. Bossut, 1778 et 1779.

29 [Ch. Bossut, 1774] dont est tirée la Fig. 14

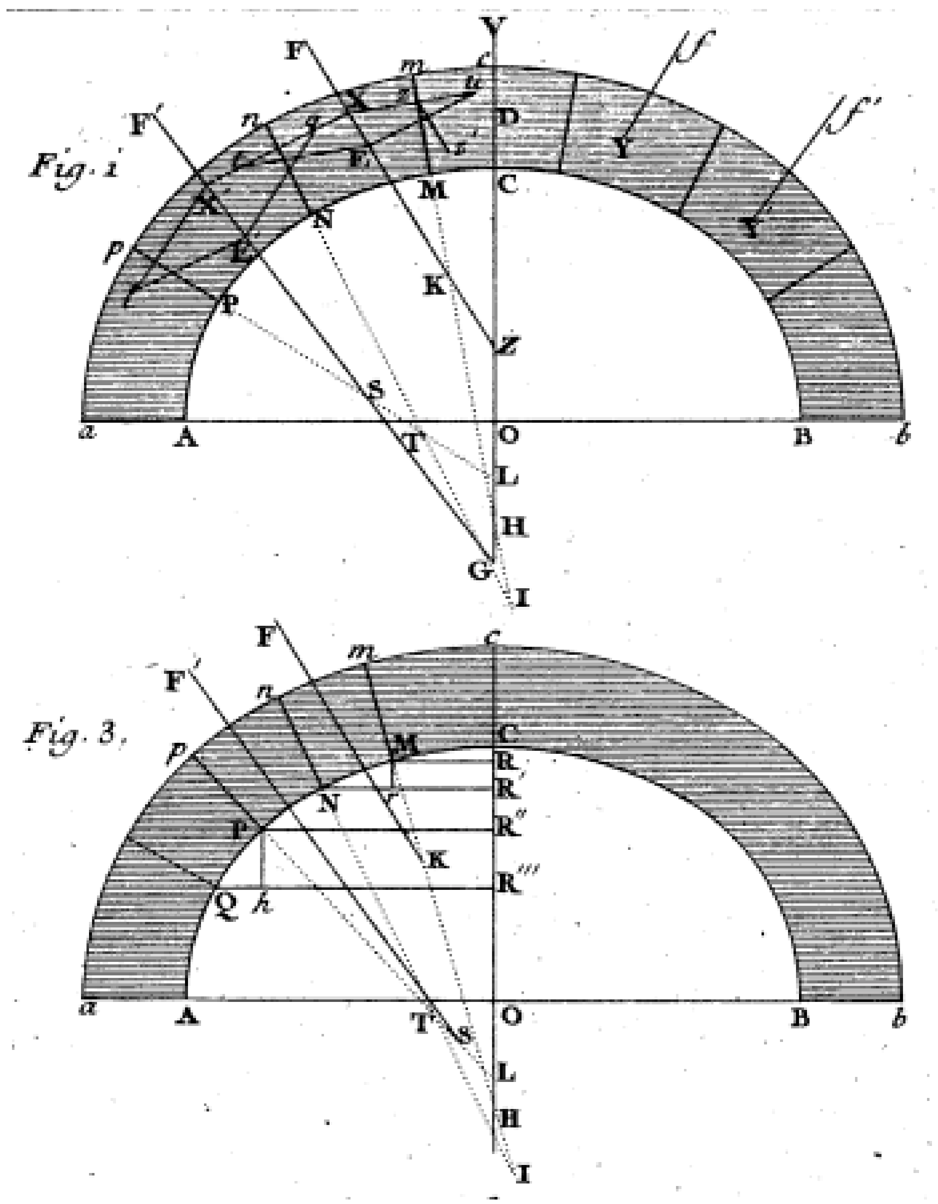


Fig. 14.

Elle apparaît dans ce même contexte chez de la Hire dans son texte de 1695 et est reprise par Couplet et Belidor. Il est intéressant de souligner que la forme donnée à cette loi dans le domaine du calcul des voûtes est particulière. C'est sous cette même forme due à de la Hire que Belidor l'énonce dans ses *Principes tirés de la mécanique.*[30] Il montre que trois forces en équilibre sont dans le même rapport que les côtés d'un triangle dont les côtés sont perpendiculaires à la direction des forces. Cette forme s'apparente visiblement à la loi des sinus de Varignon.

30 [B. F. de Belidor, 1830, p. 106-107.]

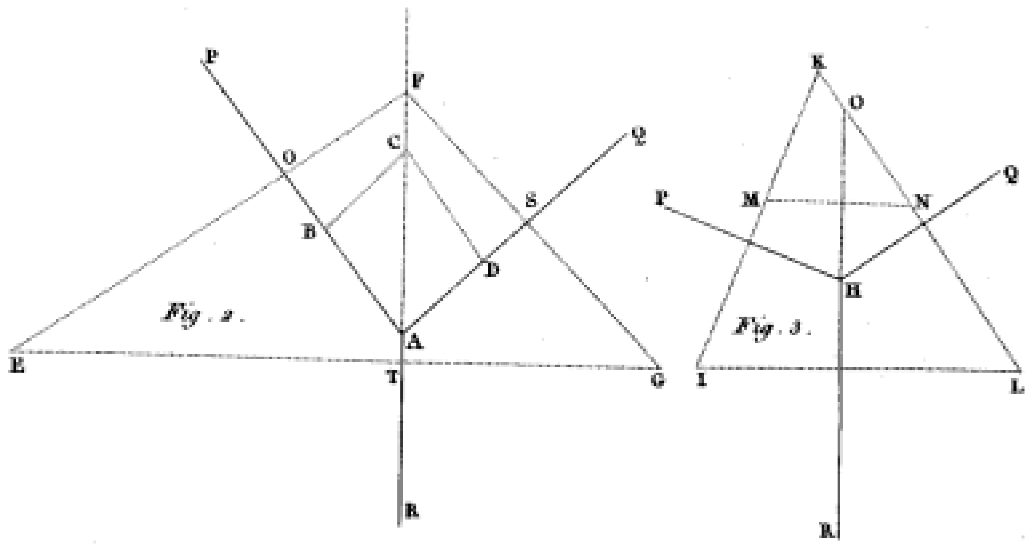


Fig.15.

La raison de cette prédilection est qu'elle permet de faire intervenir la direction des joints qui sont toujours pris perpendiculaires à la courbe d'intrados ou à la courbe optimale cherchée et de faire aisément intervenir le rayon de courbure de courbe cherchée.

Le voussoir et le coin ou plan incliné

il est évident, trouve-t-on dans l'histoire de l'Académie des Sciences pour 1704, *que tous les Voussoirs ont une figure de Coin, plus large par haut que par bas, en vertu de laquelle ils s'appuyent & se soutiennent les uns les autres, & résistent réciproquement à l'effort de leur pesanteur qui les porteroit à tomber.*[31] Cette façon de voir la voûte explique également pourquoi ces auteurs préfèrent l'énoncé de la loi du parallélogramme qui fait appel au triangle à côtés aux forces. Ce triangle correspond au plan incliné.

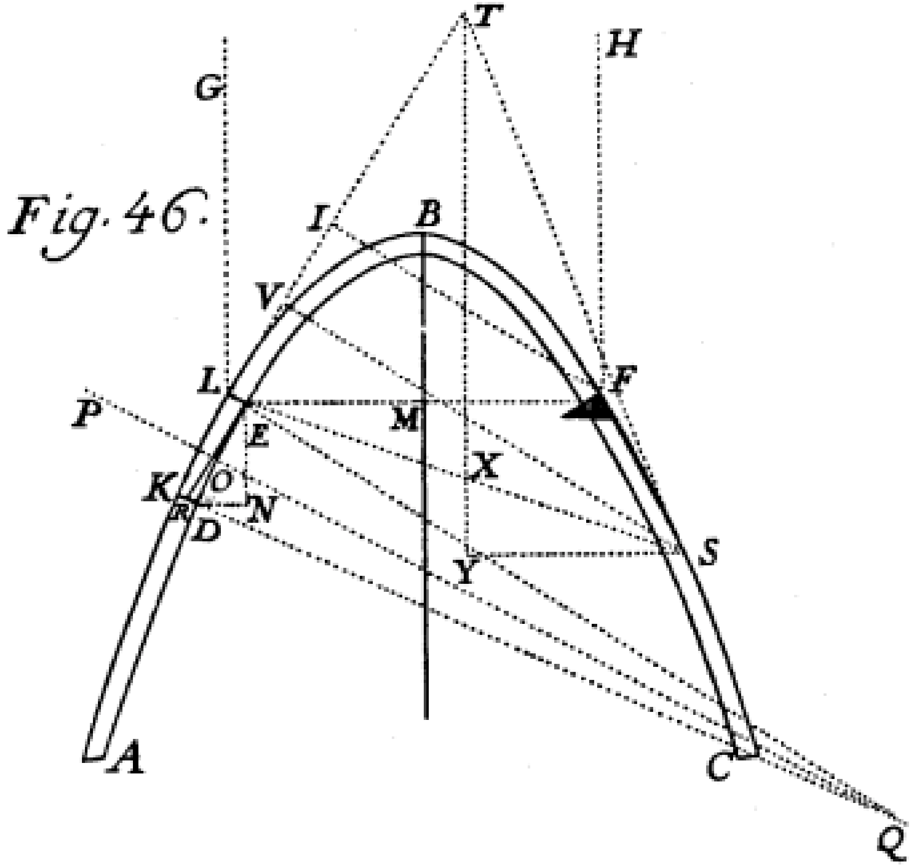
Le levier

Chez la plupart des auteurs, les piédroits fonctionnent comme des leviers mais c'est là un problème différent de celui qui consiste à trouver la courbe optimale à donner à un arc ou à un dôme dont nous nous sommes principalement occupé. Pourtant le levier intervient également dans la mise en équation de la voûte infiniment mince sous son propre poids effectuée par Jacob Bernoulli. Il fait appel à levier pour formuler la condition d'équilibre à la

---

[31] [Hist. Paris, 1704, p. 93.]

rotation d'un voussoir alors qu'il est fait appel au différences des forces pour exprimer l'équilibre à la translation. Jacob Bernoulli[32] trouve la chaînette en exigeant l'équilibre du voussoir qui ne peut que glisser verticalement (équilibre de translation) sur le plan incliné du voussoir voisin ou pivoter autour de son appui D (équilibre de rotation).

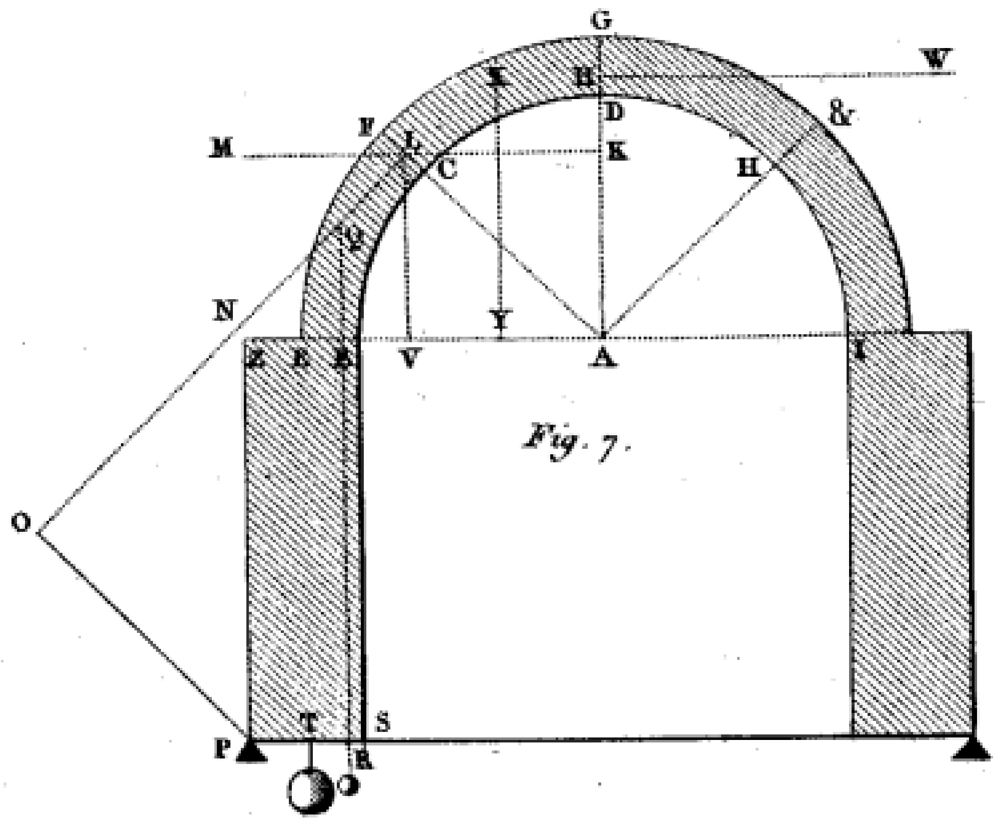


Fig[33]. 16

Le principe des travaux virtuels et les mécanismes de rupture

Jacob Bernoulli, nous venons de le voir, décrit deux mécanismes de rupture. Dans sa *Science des ingénieurs,* Belidor en décrit un autre qui fait jouer le piédroit : *ayant une voûte en plein cintre BDI, dont chaque quart de cercle BD et DI soit divisé en deux également au point C et H, l'expérience montre que c'est toujours aux endroits FC et fH que la voûte se désunit quand sa poussée est au dessus de la résistance des piedroits*.[34]

32 [Jacob Bernoulli, 1744]
33 [Jacob Bernoulli, 1744]
34 [B. F. de Belidor, 1830, p. 111.]



Fig[35]. 17

Bouguer décrit lui aussi un processus de rupture qui est apparenté à ceux de Jacob Bernoulli mais il ne distingue pas clairement les deux mouvements possibles : *Si l'on augmente trop la pesanteur de la partie supérieure HA, l'effort bC devient trop grand par rapport à la pesanteur bF du Voussoir HL, l'angle CbB devient trop petit, & alors la direction bG de l'effort composé se trouve extérieure par rapport à bB, ce qui montre que le Voussoir est plus poussé en dehors pas la pression selon bC que fait la partie supérieure de la Voute, qu'il n'est sollicité à avancer en dedans par sa propre pesanteur. Or dans ce cas l'assise entière doit saillir en dehors, & le dome doit tomber.*

C'est Mascheroni[36], qui le premier, songera à exploiter les résultats de l'observation de processus de rupture et à considérer dès lors la voûte comme un assemblage de deux barres par une rotule et à appliquer le principe des travaux virtuels à cet ensemble.

35 [P.F. de Belidor, 1830.]

36 [L. Mascheroni, 1829.]

Les principes de la mécanique selon Bouguer dans la manœuvre des vaisseaux

Si Bouguer ne peut, dans l'espace restreint de l'article que nous avons commenté, donner son point de vue ni sur les principes de la mécanique ni sur le rôle de la pratique, il n'en est pas de même dans ses ouvrages plus conséquents. On trouve dans sa *manœuvre des vaisseaux* de 1757 un livre entier *dans lequel on donne les connoissances de Méchanique & de Dynamique utiles ou nécessaires aux navigateurs, avec la solution de plusieurs Problêmes importants de Marine.*[37] La première partie est un traité de statique qui pourrait aussi bien s'appliquer à la construction des voûtes. On y retrouve les éléments que nous venons de citer à propos de l'étude des voûtes. Après avoir traité des poulies, Bouguer aborde la décomposition des forces ou des mouvements avec le cas du plan incliné puis il passe à la composition des forces ou des mouvements pour finir la partie qui nous intéresse par l'étude du levier. Comme beaucoup d'auteurs contemporains, il résume la force au mouvement qu'elle suscite.

Bouguer énonce à propos de la décomposition des forces, le théorème de de la Hire : *Autre méthode pour déterminer le rapport qui doit se trouver entre les poids ou les forces qui sont en équilibre, & application de cette méthode au plan incliné*[38] après avoir rappelé la forme habituelle de cette loi donnant pour résultante de deux forces, la diagonale du parallélogramme qu'elles composent. *Mais si on veut trouver ce rapport, d'une manière encore plus simple, on n'a qu'à élever trois perpendiculaires aux trois directions BP, BA, & BC en les faisant passer par quel point on voudra. Ces trois perpendiculaires HI, KI & HK formeront un triangle, & chacun représentera par sa longueur l'effort à la direction duquel elle sera perpendiculaire. C'est-à-dire que HI exprimant la grandeur du poids P, les deux autres côtés KI & HK exprimeront la grandeur des efforts qu'ont à soutenir les cordes BA & BC.*[39]

[37] [P. Bouguer, 1757, p. XV.]
[38] [P. Bouguer, 1757, p. 24.]
39 [P. Bouguer, 1757, p. 25.]

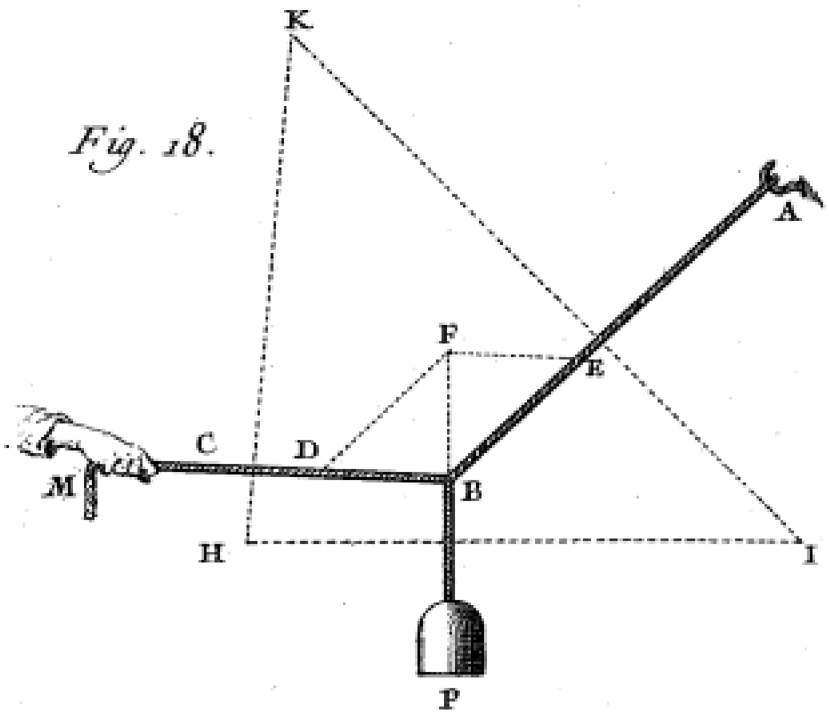


Fig. 18

Mais ce point n'est pas le plus original. A la fin du chapitre IV nous trouvons : *Que dans l'équilibre les moments des forces ou les produits de ces forces par la distance de leurs directions au point d'appui sont toujours exactement égaux.*[40] Bouguer ajoute à cette définition du moment : *il faut bien remarquer que le moment est une quantité particulière dont on ne trouve d'exemple que dans les méchaniques, & qui n'a lieu que lorsqu'une force tend à produire quelque mouvement de tournoyement ou de rotation.*[41] Le texte est certes postérieur à celui qu'Euler consacre à *un nouveau problème de mécanique*[42], en 1750 et où, dans le cas du mouvement d'un corps tel que la Terre autour d'un axe de rotation, il exige l'équilibre des moments pour empêcher le déplacement de l'axe, mais Bouguer poursuit au chapitre V: *De l'équilibre entre un grand nombre de puissances appliquées à un levier*[43] où il explique que dans ce problème de statique, on ne peut pas se contenter d'écrire l'équilibre des forces mais qu'il faut encore pour que le levier ne tourne pas que l'on ait équilibre des moments. Ce n'est qu'en 1765 qu'Euler[44] mettra de manière générale sur le même pied ces deux lois

[40] [P. Bouguer, 1757, p. 32.]
[41] [P. Bouguer, 1757, p. 33.]
[42] [L. Euler, 1750.]
[43] [P. Bouguer, 1757, p. 35.]
[44] [L. Euler, 1765.]

fondamentales de la statique, comme Jacob Bernoulli l'avait fait, 60 ans plus tôt, dans le cas particulier de l'arc stable sous son propre poids[45].

L'épreuve de la réalité pour la théorie des voûtes.

On connaît de multiples exemples de contrôle de stabilité effectués de manière théorique. On cite plus souvent celui de la coupole de Saint-Pierre de Rome. En 1748, Poleni[46] utilise la théorie de la chaînette pour juger de la stabilité de cette coupole.

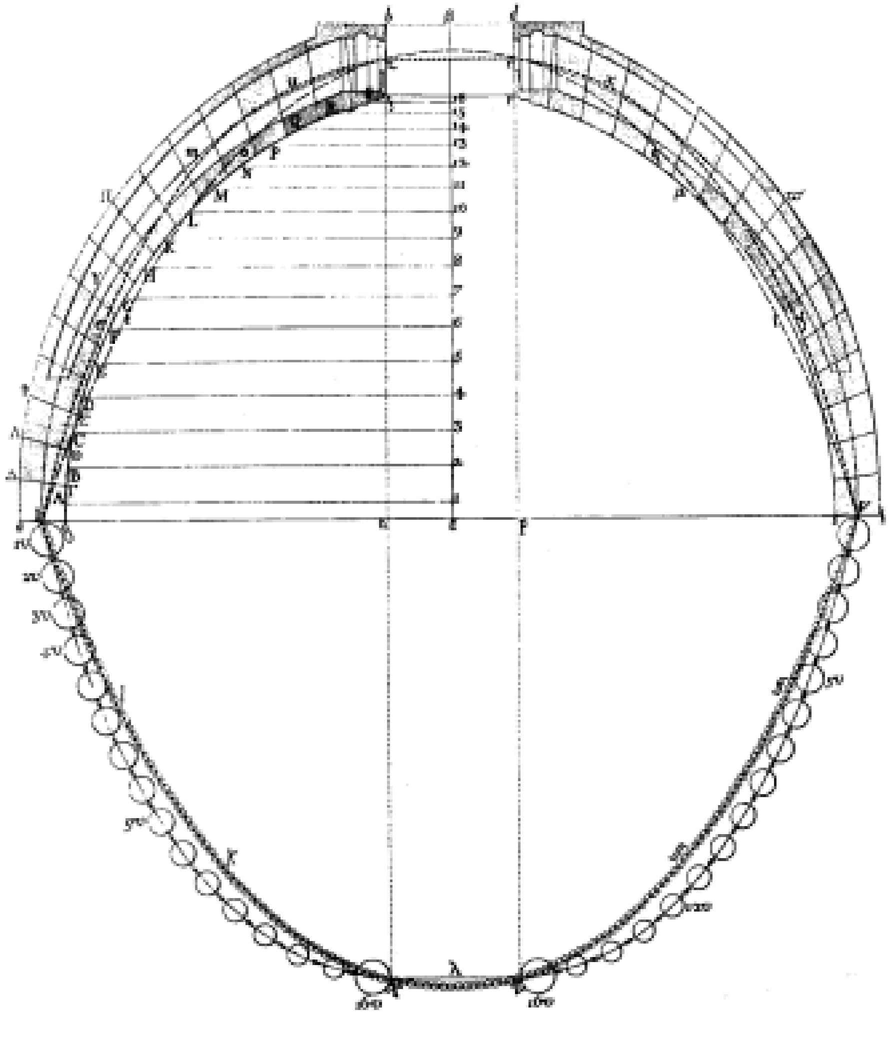


Fig. 19.

[45] Cette remarque est à mettre en rapport avec ce que Jean Dhombres écrit à propos du couple chez Bouguer, p. ???? de ce volume.

[46] [G. Poleni, 1748.]

Sur son conseil, on a renoncé à placer un arceau de fer autour de cette coupole pour la retenir. Quelques années plus tard, en 1774, Bossut applique sa théorie pour contrôler l'épaisseur des pieds droits de l'église Sainte-Geneviève construite par Soufflot. Trois ans plus tard encore, Frisi applique sa théorie à la vérification de la stabilité du dôme de Milan.

Théorie et pratique dans le traité des navires, le rôle des principes selon Bouguer

L'introduction que Bouguer donne à son *Traité du Navire*, décrit dans un extraordinaire *crescendo* les relations entre théorie et pratique. Cette introduction aurait aussi bien trouvé sa place au début d'un traité sur les voûtes. Son discours est général. *Aucune matière ne demandoit davantage à être éclairée de la lumiere des Mathématiques; & il est certain qu'aucune n'en a été plus privée jusques à présent. Rebutés à la vûë des premiers obstacles, les Marins cesserent trop tôt de faire de nouveaux efforts; & ils prirent un parti qui ne pouvoit être dicté que par le desespoir, celui de se livrer à la Pratique la plus imparfaite, en s'interdisant tout secours de la part de la Théorie.*[47] Il est inspiré par l'architecture militaire, c'est-à-dire en particulier, par le calcul de stabilité. *On avoit un exemple sous les yeux, & on ne voulut y faire attention : On ne considera point que quoique l'Architecture militaire soit extrêmement plus facile, rien ne s'est exécuté de tout tems à son égard, que par la direction de la Géométrie & des Mécaniques.*[48]

Les mathématiques ainsi présentées, Bouguer va s'attaquer aux arguments des adversaires en commençant par le problème posé par les approximations. Ces théories font appel à des modèles, comme celui de la voûte infiniment mince aux voussoirs parfaitement polis, il faut le savoir pour ne pas fausser le jugement des rapports entre théorie et pratique. *Une proposition peut être vraye dans la Théorie & fausse en même temps dans la Pratique.* commente Bouguer. *A peine est-il en effet une seule question de celles qui sont mêlées de Physique, qui soit résoluë en toute rigueur, malgré les fréquentes applications qu'on a faites, comme à l'envi, dans ces derniers tems de l'Analyse moderne. On se permet toujours quelsques adoucissemens, on écarte quelquefois avec adresse les particularités qui rendroient la discussion trop épineuse; & il ne faut pas s'étonner après cela, si l'expérience ne répond pas à tout ce qu'on s'étoit promis. Mais qu'on ne dissimule aucune circonstance, qu'on tente de résoudre les Problêmes dans toute leur difficulté; & on verra un continuel accord entre la Théorie & la Pratique; le*

[47] [P. Bouguer, 1746, p. viii.]
[48] [P. Bouguer, 1746, p. viii.]

contraire impliqueroit contradiction.[49] Ces désaccords entre théorie et pratique ne doivent donc pas conduire à rejeter l'emploi des Mathématiques comme beaucoup sont tentés de le faire. *Qu'on dise, si on veut, qu'on n'a pas encore été assez heureux pour tirer des Mathématiques, toutes les lumieres dont on a besoin pour la Marine; différens exemples ne le prouvent que trop; mais qu'on convienne en même tems qu'il n'est pas possible qu'une science qui est toute occupée du soin de peser, de mesurer, & de comparer les grandeurs, ne soit de la dernière utilité, pourvû qu'on en sache faire une application légitime dans un sujet où il s'agit de regler les unes sur les autres, un si grand nombre de parties, & de mettre l'équilibre entre un si grand nombre de différentes forces. C'est ce qu'on n'eût pas tardé à éprouver par une heureuse expérience, si ont eût travaillé d'avantage à mettre la Géométrie en crédit; & qu'on se fût efforcé en la faisant sortir de l'enceinte de ses spéculations, d'en étendre sérieusement les usages.*[50]

Il analyse ensuite des reproches faits aux gens du métier. Le premier vise le secret qui entoure les connaissances des constructeurs de navires comme celles des bâtisseurs. Il montre que ce secret empêche l'accumulation du savoir expérimental : *On sent comme nous, combien ce silence des gens du métier est nuisible : on voit assez qu'il empêche de profiter des connoissances de fait qu'ils ont au moins dû acquerir par leur long usage. Ils disputent volontiers & avec chaleur sur des choses de peu de conséquence; pendant que l'essentiel de la Construction reste enseveli sous d'épaisses ténébres : au lieu que si chacun communiquoit ce que lui a appris l'expérience, ... on ne tarderoit pas à éprouver le fruit considérable qui naîtroit de cette heureuse communication. Les Constructeurs au contraire, ... observent même un secret si profond, que leurs pratiques particulieres, quoiqu'elles ne soient toujours que quelques legeres modifications des maximes générales, constituent comme un héritage tout extraordinaire, qui ne se transmet presque jamais que de pere en fils.*[51]

Le deuxième reproche est fait aux tâtonnements qui souvent palient le manque de méthode. *On verra qu'on défere tous les jours dans des circonstances très-importantes au simple tatonnement, à celui qui est le plus sujet à tromper : on change la forme des Navires par leurs hauts, on leur ajoute un nouveau pont ou on le retranche, on altere aussi totalement la figure de leur carène, & on consent à faire tous ces changemens sans sçavoir quel en sera l'effet immédiat ... pendant qu'on pourroit se*

[49] [P. Bouguer, 1746, p. xii-xiii.]
[50] [P. Bouguer, 1746, p. xiii-xiv.]
[51] [P. Bouguer, 1746, p. xvi.]

déterminer d'une maniere aussi précise qu'infaillible, en employant les moindres connoissances de Géométrie & les plus simples opérations d'Arithmétique.[52]

Finalement, Bouguer dénonce la carence profonde que camoufflent le tâtonnement et le secret : *Il sert très-peu, ou plûtôt il devient inutile de recourir à l'avis de plusieurs Constructeurs; on ne fait autre chose que se livrer à de plus grandes incertitudes. Il arrive toujours qu'ils pensent différemment les uns des autres; & néanmoins chacun allegue également en sa faveur sa propre pratique ou l'ennuyeux & long dénombrement des Navires qu'il a déjà construits. Comme il leur est impossible de se concilier, parce qu'ils n'ont aucun moyen pour le faire, nul principe commun dont ils conviennent ou dont ils puissent partir, nulle regle, nul indice même pour discerner le vrai, ou pour le faire connoître, ils sont réduits à répéter continuellement les mêmes assertions, au lieu de preuves.*[53] Ils leur manque la théorie qui sert de fondement : *On ne peut mieux les comparer qu'à un grand nombre de personnes, qui tout occupées de commerce, ne connoîtroient dans l'échange de leurs marchandises ni l'usage des balances ni celui des mesures.*[54]

Pour conclure *que la Pratique livrée à elle seule & dénuée de tous secours de la Théorie, ne peut pas faire découvrir les vraies regles en un pareil sujet. Le Navire est un tout si composé, que chaque changement fait à une seule partie, est le commencement d'une infinité de dispositions ou de combinaisons différentes, dont chacune doit avoir un succès particulier. On ne peut, par exemple, toucher à la largeur de la carène sans se mettre dans le nécessité de changer toutes les autres parties.*[55]

Il est donc certain que quoique la Pratique soit d'une extrême nécessité & qu'on ne puisse trop la recommander, elle est cependant d'un usage trop peu étendu, lorsqu'on la laisse à elle seule dans la circonstance présente. Sa trop grande limitation est un vice inséparable de sa nature, & qui se fait sentir dans une infinité d'autres rencontres. C'est qu'elle est originairement stérile, c'est qu'elle ne fournit lorsqu'elle est absolument seule, que des connoissances qui n'en produisent point d'autres, ou qui restent toujours renfermées dans les premières bornes qu'on leur a données.... Il ne sera pas possible d'avancer d'un pas de plus, faute de sçavoir ou même de soupçonner que toutes ces actions sont soumises à certaines loix qu'il seroit important de connoître. Qu'on fasse intervenir au contraire les lumières de la Spéculation; il est vrai, & on ne sauroit le dire trop de fois, qu'il faudra toujours y joindre les expériences ou ces connoissances de fait dans lesquelles consiste la Pratique; mais la Théorie s'en servira ensuite comme de principes, elle en tirera des inductions sûres; & étendant ses

---

[52] [P. Bouguer, 1746, p. v xvii.]
[53] [P. Bouguer, 1746, p. xviii.]
[54] [P. Bouguer, 1746, p. xviii.]
[55][P. Bouguer, 1746, p. xx.]

vûës à tous les autres cas, & jusqu'à l'infini, car elle n'est pas arrêtée par les mêmes bornes que la Pratique, elle tiendra effectivement lieu d'une infinité d'autres expériences qu'il jamais été possible d'exécuter.[56]

Bibliographie

Bernard Forest de Belidor, *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*, Paris, 1729 ; réédité et commenté par Navier à Paris chez Firmin Didot, en 1830. Nous citons d'après cette deuxième édition.
Jacob Bernoulli, 1744, *Varia posthuma, N° XXIX, Opera*, vol. 2, Genève, pp. 1119-1123.
Charles Bossut, 1778, « Recherches sur l'équilibre des voûtes », *Mémoires de l'Académie de Paris*, pp. 534-566.
Charles Bossut, 1779, « Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme », *Mémoires de l'Académie de Paris*, pp. 587-596.
Pierre Bouguer, 1727, « De la mâture des vaisseaux », *Recueil des Prix de l'Académie de Paris.*
Pierre Bouguer, 1729, « De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres », *Recueil des Prix de l'Académie de Paris.*
Pierre Bouguer, 1731, « De la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole », *Recueil des Prix de l'Académie de Paris.*
Pierre Bouguer, 1732, « Sur de nouvelles courbes ausquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite », *Mémoires de l'académie de Paris*, pp. 1-14.
Pierre Bouguer, 1734, « Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme », *Mémoires de Paris*, pp. 149-164.
Pierre Bouguer, 1746, *Traité du Navire, de sa construction et de ses mouvemens,* Paris, Jombert.
Pierre Bouguer, 1757, *Manœuvre des vaisseaux ou Traité de méchanique et de dynamique; Dans lequel on réduit à des solutions très-simples les problêmes de marine les plus difficiles, qui ont pour objet le mouvement du navire,* Paris, H.L. Guerin & L.F. Delatour.
Charles-Ferdinand-Antoine-Florent-François Le Prudhomme d'Hailly, vicomte de Nieuport, 1778, « Essai analytique sur la méchanique des voûtes », *Mémoires de l'Académie de Bruxelles pour 1778*, tome 2, pp. 43-136.
F. Derand, 1643, *L'architecture des voutes ou l'art des traits et coupe des voutes,* Paris, Sebastien Cramoisy, Imprimeur du Roy.
Leonhard Euler, 1750, E 177, « Découverte d'un nouveau principe de mécanique », *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 1750*, pp. 185-207, in *Leonardi Euleri Opera Omnia*, série. II, vol. 5, pp. 81-108.
Leonhard Euler, 1765, E. 289, «*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum,* Rostock, A.F. Röse, in *Leonardi Euleri Opera Omnia*, série. II, vol. 3-4.
David Gregory, 1697, « Catenary », *Philosophical Transactions*, pp. 637-652.
Hist. Paris, 1704 « Sur la figure de l'extrados d'une voute circulaire, dont tous les voussoirs sont en équilibre entre eux », *Histoire de l'Académie de Paris pour 1704*, p. 93.
Lorenzo Mascheroni, 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte,* Bergamo, Fr. Locatelli. Nous citons d'après la deuxième édition, Milano, G. Silvestri 1829.

[56][P. Bouguer, 1746, p. xxii-xxiii.]

Giovanni Poleni, 1748, *Memorie istoriche, della Gran Cupola del Tempio Vaticano,* Padova.
Jacob Bernoulli, 1744, Med. CCLXXXV et V.P.. XXIX, du 5/12/1704, « Problema de Curvatura fornicis, cujus partes se mutuo proprio pondere suffulciunt sine opere caementi »., *Jacobi Bernoulli Basilieensis Opera*, Genève, Cramer et Philibert, pp. 1119-1123.