Dossier 2, établi par Patricia Radelet-de Grave

Le mouvement des projectiles d'après Galilée

Le thème des coniques est central dans l'histoire des mathématiques et permet de la parcourir de l'Antiquité aux temps modernes. Ce thème joue un rôle particulier dans les relations entre mathématiques et physique. En effet, lorsque l'on renoncera au cercle parfait de Platon comme description des mouvements, le remplaceront les coniques, principalement l'ellipse et la parabole. L'abandon de l'orbite circulaire au profit de l'elliptique par Kepler est rapidement suivi par la proposition que fait Galilée du mouvement parabolique pour les projectiles. Et il ne faudra plus attendre que cinquante ans avant que Newton ne montre l'unité, via les coniques et la gravitation universelle, de ces deux types de mouvements, célestes et terrestres. Le fait que l'on renonce au cercle, dans le contexte physique du mouvement des masses, pour le remplacer par des objets mathématiquement étudiés depuis Apollonius, ne peut que faire réfléchir celui qui s'interroge sur les rapports entre physique et mathématiques.

Cette question interpelle d'autant plus fortement aujourd'hui que nous savons que ces coniques ne fournissent pas la description parfaite du mouvement des corps célestes, mais en constituent une bonne approximation. Que s'est il passé? N'a-t-on fait appel aux coniques que parce qu'elles avaient fait l'objet d'études approfondies? Dans quelle mesure la nature présente-t-elle réellement ces coniques? Nous ne tenterons pas de répondre à ces questions dans ce qui suit. Mais le fait qu'elle se pose nous semble justifier l'intérêt que l'on peut porter à la lecture de travaux anciens et fondateurs. Il nous a dès lors semblé intéressant d'analyser en détail le texte de Galilée sur le mouvement des projectiles. Texte qui constitue la quatrième et dernière journée des *Discorsi e dimostrazioni matematiche* publiés en 1638. Outre l'importance du texte lui-même, il nous a paru d'autant plus précieux que Galilée s'y veut professeur et qui plus est professeur du plus grand nombre. Son style l'organisation du texte ne sont pas établis à la légère et méritent notre attention. Galilée entendait que son texte fût lu sans intermédiaire.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Figure 1: La page de titre des *Discorsi e dimostrazioni matematiche* de Galilée

Notre étude est destinée au professeur qui, enseignant les mathématiques et plus précisément les propriétés de la parabole, désire illustrer son cours par un texte. Sa lecture trouverait également sa place dans un cours de mécanique et il nous semble important de souligner que c'est précisément dans le mariage de ces deux disciplines que réside l'un des enseignements les plus profonds de ce texte.

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES

Extraits du texte original[1]

Théorème I - Proposition I

Un projectile qu'entraîne un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas, décrit au cours de son déplacement une trajectoire demi-parabolique.

SALVIATI je désire au contraire que vous les compreniez et grâce, à l'auteur lui-même qui, lorsqu'il me permit de voir son travail et parce que je n'avais pas non plus à ma disposition les livres d'Apollonius, s'efforça de me démontrer sans qu'aucune connaissance particulière soit requise, deux des propriétés essentielles de la parabole - les seules dont nous ayons besoin dans le présent traité. Ces propriétés sont également établies par Apollonius, mais après de nombreuses autres qu'il serait trop long d'examiner ; aussi mon intention est-elle de suivre une voie plus brève, en dérivant purement et simplement la première propriété de la génération de la parabole, et en m'appuyant sur elle pour obtenir immédiatement la démonstration de la seconde. Soit donc la première, de ces propriétés.

[1] *Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze Attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali* fut publié, comme on peut le voir sur la reproduction de la page de titre (Fig.1), à Leiden chez Elsevier, en 1638. Il est reproduit au volume VIII, *Le Opere di Galileo Galilei,* Edizione nazionale, Ed. Favaro, Barbera, Firenze, 1890-1909, pp. 9-318. Nous nous baserons sur la traduction française publiée par M. Clavelin, *Philosophies pour l'âge de la science,* Armand Colin, 1970, où nous avons corrigé quelques fautes de frappe dans les dénominations des points. Ce texte sera référé selon *Discorsi.*

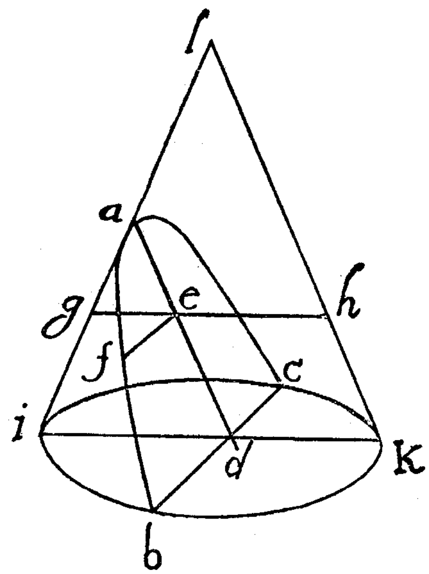

Figure 2:

Représentons-nous un cône droit avec le cercle ibkc pour base et pour sommet le Point l : si on le coupe par un plan parallèle au côté lk, on obtiendra la section bac, appelée parabole; sa base bc coupe à angle droit le diamètre ik du cercle $ibkc$, et son axe ad est parallèle au côté lk. Prenons un point quelconque f sur la ligne bfa et menons la droite fe parallèle à la base bd : je dis que le carré de bd a au carré de fe même rapport que l'axe da à sa partie ae. Par le point e faisons passer un plan parallèle au cercle $ibkc$ qui produira dans le cône une section circulaire dont le diamètre sera la ligne geh : comme bd est perpendiculaire au diamètre ik du cercle ibk, le carré de bd sera égal au rectangle formé par id et dk; et de même dans le cercle supérieur qui passe par les points g, f, h, le carré de fe sera égal au rectangle formé par ge et eh : par conséquent le carré de bd aura le carré de fe le même rapport que le rectangle idk au rectangle geh. Mais puisque ed est parallèle à hk, eh et dk qui sont également parallèles seront égaux; le rectangle idk aura ainsi avec le rectangle geh même rapport que id avec ge, c'est-à-dire que da avec ae : par conséquent entre le rectangle idk et le rectangle geh, c'est-à-dire entre le carré de bd et le carré de fe, existera le même rapport qu'entre l'axe *da* et sa partie *ae*, ce qu'il fallait démontrer.

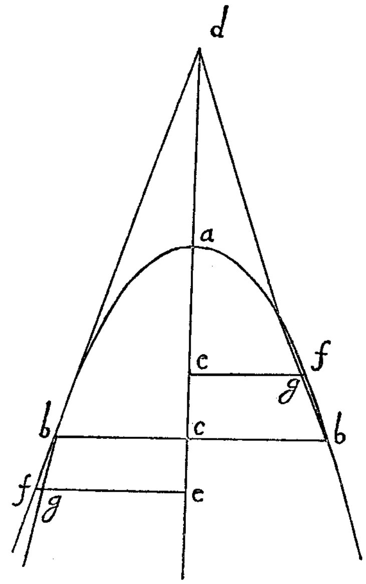

Figure 3:

Quant à la deuxième proposition nécessaire à la présente étude, nous l'établirons comme suit. Traçons une parabole dont l'axe *ca* est prolongé vers l'extérieur jusqu'en *d*, et par un point *b* quelconque menons la ligne *bc* parallèle à la base de la parabole ; si nous prenons da de même longueur que la partie *ca* de l'axe, je dis alors que la droite tirée par les points *d* et *b* ne tombe pas à l'intérieur de la parabole, mais à l'extérieur, et de telle façon qu'elle lui est tangente au point *b*. Supposons, en effet, si cela est possible, qu'elle tombe à l'intérieur de la parabole, qu'elle la coupe en haut ou, après avoir été prolongée, en bas, et soit sur cette ligne un point *g* quelconque par lequel on fait passer la droite fge. Comme le carré de fe est plus grand que le carré de *ge*, il y aura entre le carré de fe et le carré de *bc* un rapport plus grand qu'entre le carré de *ge* et le carré de *bc* ; et puisque, d'après la proposition précédente, le carré de fe est au carré de *bc* comme *ea* est à *ac*, *ea* sera avec *ac* dans un rapport plus grand que le carré de *ge* avec le carré de *bc* c'est-à-dire que le carré de *ed* avec le carré de *dc* (en effet, d'après les triangles *dge* [et *dbc*], *ge* est avec *bc* comme *ed* avec *dc* ; mais la ligne ea est avec la ligne ac, c'est-à-dire avec *ad*, dans le même rapport que le quadruple du rectangle *ead* avec le quadruple du carré de *ad*, ou encore avec le carré de *cd* (lequel est égal à quatre fois le carré de *ad*) : par conséquent le quadruple du rectangle cad aura avec le carré de *dc* un rapport plus grand que le carré de *ed* avec le carré de *dc*, et le quadruple *du* rectangle *ead* sera plus grand que le carré de *ed* ; or cela est faux, et il est plus petit, puisque les parties *ea* et *ad* de la ligne *ed* ne sont pas égales. Ainsi la droite *db* est tangente à la parabole en *b*, et ne la coupe pas ce que l'on devait démontrer.

...

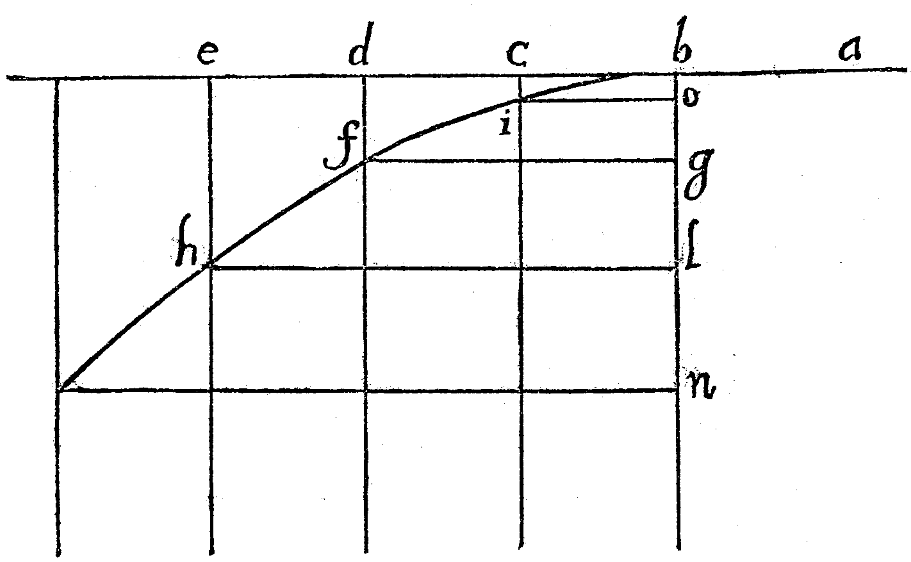

Figure 4:

SALVIATI Nous pouvons donc reprendre le texte pour voir comment il démontre sa première proposition, dans laquelle il entend prouver que la trajectoire décrite par un mobile pesant, alors qu'il descend d'un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et du mouvement naturel de chute, est une demi-parabole. Soit une ligne horizontale ou un plan *ab*, situé en hauteur, et sur lequel un mobile se meut d'un mouvement uniforme de a vers b ; si le support que fournit le plan, disparaît en b, le mobile acquerra en outre, du fait de sa gravité, un mouvement naturel vers le bas le long de la perpendiculaire bn. Prolongeons directement le plan ab par la ligne be, pour représenter l'écoulement ou la mesure du temps et sur celle-ci marquons arbitrairement du nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, bc, cd, de; des points b, c, d, e, abaissons des lignes équidistantes de la parallèle bn ; sur la première de celles-ci prenons une distance quelconque ci, puis sur la suivante une distance quadruple df, sur la troisième une distance neuf fois plus grande eh, et ainsi de suite sur les autres lignes en suivant la proportion des carrés de cb, db, eb, ou encore en raison double de ces mêmes lignes. Si nous supposons qu'un mobile entraîné d'un mouvement uniforme de b vers c subit en même temps une descente perpendiculaire égale à ci, à la fin de l'intervalle de temps bc il se trouvera en i. Le mouvement continuant, à la fin de l'intervalle de temps db, double de bc, la distance parcourue vers le bas sera le quadruple de la première distance ci; on a en effet démontré, dans le traité précédent, que, les espaces parcourus par un corps grave animé d'un mouvement accéléré, sont comme les carrés des temps; par conséquent la distance eh, franchie pendant le temps be, sera comme 9, d'où il s'ensuit manifestement que les espaces eh, df, ci sont entre eux comme les carrés des lignes eb, db, cb. Menons maintenant des points i, f, h, les droites io, fg, hl, équidistantes de be : les lignes hl, fg, io, seront égales respectivement aux lignes eb, db, cb de leur côté les lignes bo, bg, bl seront égales aux lignes ci, df, eh; le carré de hl sera au carré de fg comme la ligne lb à la ligne bg, et le carré de fg, sera au carré de io, comme gb est à bo : par conséquent les points i, f, h, sont situés sur une seule et même parabole. On démontrera de la même façon, en prenant une nombre quelconque d'intervalles de temps égaux et d'une grandeur arbitraire que, les points par lesquels passe un mobile animé d'un mouvement semblablement composé pendant ces mêmes intervalles de temps se trouvent sur une même ligne parabolique. D'où résulte notre proposition.

...

SAGREDO On ne peut nier que le raisonnement soit nouveau, ingénieux et concluant; il n'en procède pas moins *ex suppositione,* car il suppose que le mouvement transversal demeure toujours uniforme, que le mouvement vers le bas conserve de même son mode propre qui est d'accélérer constamment en proposition du carré des temps, enfin que ces mouvements et leurs vitesses, en se combinant, ne s'altèrent ni ne se gênent, en sorte que la trajectoire du projectile, tout au long du mouvement, ne subit aucune transformation de nature : or cela, à mon avis, est impossible. Car c'est un fait que l'axe de la parabole le long duquel nous admettons que s'effectue le mouvement naturel des graves, se termine, par suite de sa perpendicularité à l'horizon, au centre de la Terre ; et c'est un autre fait que la parabole s'écarte sans cesse de son axe ; aucun projectile ne devrait donc jamais se diriger vers le centre de la Terre, ou s'il le fait, comme cela semble nécessaire, alors sa trajectoire doit se transformer en une autre courbe, fort différente d'une parabole.

...

Théorème II – Proposition II

SALVIATI Poursuivant sa recherche, l'Auteur nous fait alors passer au cas d'un mobile mû à nouveau d'un mouvement composé de deux mouvements, l'un horizontal et uniforme, l'autre perpendiculaire mais naturellement accéléré, c'est-à-dire ceux-là mêmes dont dépendent le mouvement du projectile, et la trajectoire parabolique en chaque point de laquelle on cherche. a déterminer l'*impeto* du mobile. En vue dei quoi l'Auteur établit en ces termes la manière, ou plutôt la méthode, permettant de mesurer cet *impeto*, sur la ligne même où le grave se meut vers le bas, d'un mouvement naturellement accéléré, à partir du repos.

...

Théorème III Proposition III

...

Toutefois, avant d'aller plus loin, il me faut ici avertir d'une chose comme le mouvement dont nous allons parler est composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas (car c'est par un tel mélange qu'est formée et décrite la trajectoire d'un projectile, c'est-à-dire la parabole), nous sommes dans l'obligation de définir une commune mesure à l'aide de laquelle mesurer la vitesse, *l'impeto* ou le moment de l'un et l'autre mouvement; de plus comme les degrés de vitesse d'un mouvement uniforme sont innombrables et qu'un seul entre tous ces degrés (et non n'importe lequel) doit être réuni et composé avec le degré de, vitesse acquis grâce au mouvement naturellement accéléré, je n'ai pu trouver aucun moyen plus facile pour le déterminer que d'assumer un autre mouvement du même genre. Pour me faire mieux comprendre, soit la perpendiculaire ac élevée sur l'horizontale bc; ac sera la hauteur et cb l'amplitude de la demi-parabole ab, laquelle est engendrée par la composition de deux mouvements, dont l'un est celui du mobile quand il descend le long de ac, partant du repos en a, d'un mouvement naturellement accéléré, et dont l'autre est le mouvement uniforme transversal sur l'horizontale ad. L'*impeto* acquis en c après la descente ac est déterminé par la grandeur de cette même hauteur ac uniques et toujours semblable en effet est l'*impeto* d'un mobile, tombant de la même hauteur; en revanche sur l'horizontale ce n'est pas un mais d'innombrables degrés de vitesse qui peuvent être assignés aux mouvements uniformes. Afin de pouvoir isoler de tous les autres, et pour ainsi dire montrer du doigt, celui que je choisirai, je prolongerai la hauteur ca vers le haut et marquerai sur la ligne ainsi obtenue selon les besoins, la sublimité ae : car si je me représente un mobile tombant de cette sublimité, à partir du repos en e, il est évident que l'*impeto* qu'il acquerra au point a sera le même que celui- avec lequel je l'imaginerai en train de se mouvoir, après conversion de son mouvement sur l'horizontale ad; et ce degré de vitesse sera précisément celui par lequel, dans un temps égal à celui de sa descente le long de ea, il parcourra sur l'horizontale un espace double de la même distance ea. Tel est l'avertissement qu'il me semblait nécessaire d'introduire.

On notera en outre que j'appelle " amplitude " de la demi-parabole ab l'horizontale *cb*

" hauteur ", c'est-à-dire *ac*, l'axe de la même parabole;

mais que je nomme " sublimité " la ligne *ea* dont le franchissement en chute libre, détermine l'*impeto* horizontal.

Problème I – Proposition IV

Comment déterminer l'*impeto* en chacun des points d'une parabole donnée, décrite par un projectile.

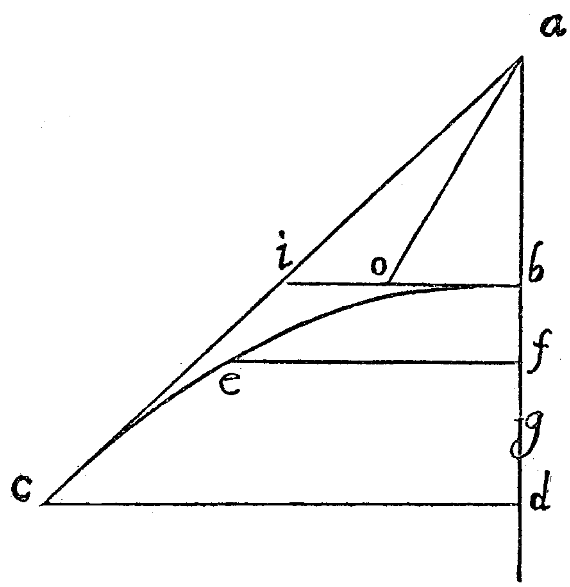

Figure 5:

Soit la demi-parabole *bec* dont *cd* est l'amplitude, *db* la hauteur, et qui, prolongée vers le haut, rencontre en *a* la tangente à la parabole *ca*. Si l'amplitude *cd* est égale à la hauteur totale da, bi sera égal à *ba* et *bd* d'autre part, si nous convenons que *ab* lui-même, représente la mesure, du temps de chute le long de *ab*, ainsi du moment de vitesse acquis en *b* au terme de la descente *ab* à partir du repos en a, dc (qui est le double de *bi*) sera l'espace que le mobile. parcourrait dans le même temps grâce à l'*impeto ab*, s'exerçant désormais sur une ligne horizontale ; mais dans le même temps, un corps descendant le long de *bd*, à partir du repos en *b*, franchit la hauteur *bd* il est donc clair que le mobile qui, partant du repos en *a*, tombera le long de *ab*, puis verra son mouvement converti en mouvement horizontal avec l'*impeto ab*, parcourra un espace égal à *dc*. Toutefois lorsqu'il vient à descendre le long de *bd*, il franchit la hauteur *bd* et décrit la parabole *bc* dont l'*impeto* au point *c* est dû à la combinaison de l'*impeto* du mouvement transversal uniforme (dont le moment est comme *ab*) avec l'autre, *impeto* acquis après la descente *bd* au point *d*, ou encore *c* : et leurs moments sont égaux. Si donc nous admettons que ab est la mesure de l'un d'eux, soit celui du mouvement transversal uniforme, puis que *bi*, qui est égal à *bd*, mesure l'*impeto* acquis en *d* ou en *c*, la sous-tendue *ia* représentera la grandeur de l'*impeto* composé de l'un et de l'autre *impeto* - elle fournira- donc la quantité ou mesure du moment total par lequel se manifeste au point c l'*impeto* du projectile qui a suivi la parabole *bc*. Ce résultat présent à l'esprit, marquons sur la parabole un point quelconque *e*, où il s'agit de déterminer l'*impeto* du projectile. Menons l'horizontale ef et prenons *bg* moyenne proportionnelle entre *bd* et bf comme *ab* ou *bd*, donne par convention la mesure du temps et du moment de vitesse produit par la chute *bd*, à partir du repos en *b*, le segment *bg* donnera le temps ou plutôt la mesure du temps et de l'*impeto* au point f quand le mobile vient de *b*. Si donc nous prenons *bo* égal à *bg* et traçons la diagonale *ao*, celle-ci représentera la grandeur de l'*impeto* au point *e* : avec *ab* nous avons en effet une détermination du temps et de l'*impeto* en *b*, - *impeto* qui une fois dévié sur l'horizontale demeure identique à lui-même - et *bo* quant à lui détermine l'*impeto* en f ou en *e*, c'est-à-dire celui qu'engendre la descente, à partir du repos en *b*, sur la hauteur bf : or *ao* est égal en puissance à la somme de *ab* et *bo*. D'où suit clairement ce qui était demandé.

Reprenons donc la vitesse et l'*impeto* acquis par un grave, tombant comme nous le disions, de la hauteur d'une pique, puisque telle est la vitesse dont nous voulons nous servir pour mesurer le cas échéant les autres vitesses et *impeto*, et supposons, par exemple, que le temps d'une telle chute soit de 4 secondes ; pour déterminer à l'aide de cette mesure l'*impeto* d'un mobile au terme d'une descente quelconque, soit plus grande soit plus petite, l'erreur serait de conclure directement d'après le rapport de

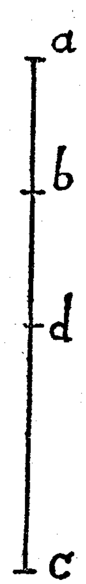

Figure 6:

cette nouvelle hauteur avec la distance d'une pique et d'estimer, si l'on veut, qu'à une hauteur quadruple correspond l'acquisition d'une vitesse quadruple : en fait cela est faux, car dans le mouvement naturellement accéléré la vitesse augmente ou diminue non en proportion des espaces mais des temps, et ceux-là, comme il a déjà été démontré, varient comme les carrés de ceux-ci. C'est pourquoi si nous prenions sur une ligne droite une partie de cette ligne pour mesure de la vitesse, du temps et aussi de l'espace franchi en un tel temps (trois grandeurs que pour aller plus vite on représente souvent par un même segment), ni le temps ni le degré de vitesse relatifs à une autre distance ne seraient représentés par cette distance, mais bien par la ligne qui serait moyenne proportionnelle entre l'une et l'autre distance. je m'expliquerai mieux sur un exemple. Sur la ligne *ac*, perpendiculaire à l'horizon, nous désignons par *ab* un certain espace franchi par un grave qui descend d'un mouvement naturellement accéléré; bien qu'il soit possible de prendre une ligne quelconque, je représenterai le temps de ce parcours, pour plus de brièveté, par la même ligne *ab*, et je prendrai encore ab pour mesure de l'*impeto* et de la vitesse engendrés par un tel mouvement : ainsi pour toutes les distances, ultérieurement considérées les mesures s'effectueront à partir du segment *ab*. Après avoir fixé à notre guise, et au moyen d'une seule grandeur, l'expression de ces trois quantités fort différentes, savoir l'espace, le temps et l'*impeto*, proposons-nous de déterminer pour la hauteur ac, et le temps que durera la descente de *a* en *c*, et l'*impeto* que le mobile, aura acquis au point final *c* - l'évaluation s'effectuant par rapport au temps et à l'*impeto* mesurés pour la distance *db*. Questions auxquelles on répondra en prenant ad moyenne proportionnelle, entre *ac* et *ab*, et en affirmant que le temps requis, pour descendre le long de *ac* tout entier est comme le temps *ad* vis-à-vis du temps *ab*, par lequel on a figuré initialement le temps requis pour franchir *ab*. Nous dirons pareillement que l'*impeto* ou degré de vitesse que possédera le grave au point *c* est avec l'*impeto* qu'il possédait en *b* dans le même rapport que la ligne *ad* à la ligne *ab*, la vitesse, comme on sait, croissant en proportion directe du temps : conclusion dont l'Auteur bien qu'il l'ait prise pour postulat, a néanmoins voulu justifier l'application à la Proposition III.

Problème, Proposition XII

Calculer et disposer sous forme de table les amplitudes de toutes les demi-paraboles que décrivent des projectiles lancés avec un même, *impeto.*

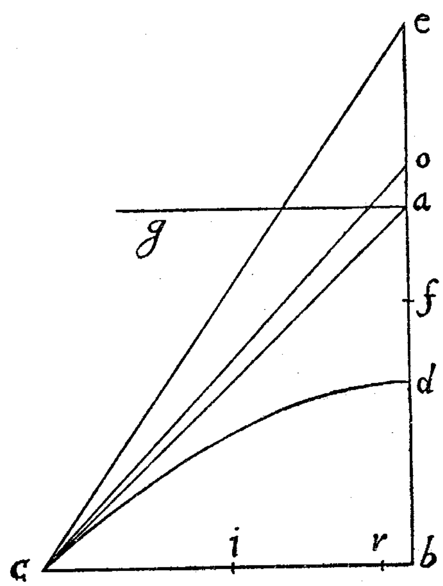

Figure 7:

Il ressort des démonstrations antérieures que des paraboles données, leurs sublimités, jointes à leurs hauteurs, forment au-dessus de l'horizon des perpendiculaires d'égale longueur, alors ces paraboles sont décrites par des projectiles lancés avec un même *impeto* : en conséquence ces perpendiculaires doivent être comprises entre les mêmes lignes horizontales parallèles. Prenons la perpendiculaire ba égale à l'horizon cb, et joignons la diagonale ac : l'angle acb aura une valeur de 45°; divisons ensuite la perpendiculaire ba par le milieu en d : la demi-parabole dc ,sera celle qui est décrite depuis la sublimité ad avec la hauteur db, et son *impeto* en c sera égal à celui d'un mobile qui, partant du repos en a, descend le long de la ligne ab; si maintenant l'on mène ag parallèle à bc, pour toutes les demi-paraboles, dont l'*impeto* sera égal à celui dont on vient de parler, la somme de la hauteur et de la sublimité sera égale à la distance comprise entre les parallèles ag et bc. De plus, comme il a déjà été établi que des demi-paraboles dont les tangentes s'écartent d'une même quantité, en plus ou en moins, d'une élévation de 45°, ont des amplitudes égales, les calculs que nous allons faire pour les plus grandes élévations serviront aussi pour les plus petites. Divisons ensuite en 10 000 parties la plus grande amplitude de projection, c'est-à-dire celle d'une demi-parabole dont l'angle d'élévation est de 45° : cette évaluation s'appliquera à la ligne ba ainsi qu'à l'amplitude de la demi-parabole bc. Nous choisissons ce nombre de 10 000, car nous nous servons dans ces calculs de la table des tangentes où telle est précisément la valeur de la tangente de 45°. Passant alors à l'essentiel, menons ce en formant un angle ecb plus grand (quoique toujours aigu) : le problème est de décrire la demi-parabole qui ait ec pour tangente et dont la sublimité, jointe à la hauteur, soit égale à la ligne ba elle-même. Partant de l'angle donné bce prenons, dans la table des tangentes, la valeur de la tangente be, et divisons be par le milieu en f; trouvons ensuite la troisième proportionnelle de bf et bi (moitié de bc), qui nécessairement sera plus grande que fa; et soit fo. On a ainsi découvert que la demi-parabole inscrite dans le triangle ecb avec ce pour tangente, et d'amplitude cb, aura bf pour hauteur et fo pour sublimité. Mais la longueur bo, prise en totalité, dépasse la distance comprise entre les parallèles ag et c-b, alors qu'elle devrait lui être égale ; si nous désirons donc qu'à la fois la parabole cherchée et la parabole dc soient décrites par des projectiles tirés de c avec le même *impeto* (et sans oublier qu'un nombre indéfini de paraboles semblables, plus grandes ou plus petites, peuvent être décrites à l'intérieur de l'angle bce), il nous faudra trouver une autre parabole, semblable à dc, dont la sublimité ajoutée à la hauteur (celle-ci étant homologue à bc) sera égale à ba. Que, l'amplitude bc ait alors avec cr le même rapport que ob avec ba : on aura obtenu cr qui est précisément l'amplitude de la parabole ayant bce comme angle d'élévation, et dont la sublimité, jointe à la hauteur, est égale à la distance comprise entre les parallèles ga et eb, c'est-à-dire ce que l'on cherchait. L'opération par conséquent a lieu comme suit :

Ayant relevé la tangente de l'angle donné bce, on prend sa moitié, à laquelle on ajoute, fo troisième proportionnelle entre cette même moitié et la moitié de bc ; puis on fait en sorte que bc ait avec une quatrième longueur même rapport que ob avec ba : cette longueur est cr, c'est-à-dire. l'amplitude cherchée.

Prenons un exemple. Soit l'angle ecb de 50 degrés ; sa tangente sera 11 918, et sa moitié, c'est-à-dire bf, sera 5 959 ; la moitié de bc est 5 000 ; la troisième proportionnelle de ces deux moitiés est 4 195 qui, ajoutée à bf, donne 10 154 pour la longueur bo. Que le rapport de ob à ba, c'est-à-dire de 10 154 à 10 000, soit aussi celui de bc, c'est-à-dire de 10 000 (l'une et l'autre, en effet, sont tangentes de l'angle de 45 11) à une quatrième longueur : nous obtiendrons ainsi l'amplitude cherchée rc, soit 9 848, alors que bc (l'amplitude maxima) est égale à 10 000. Les amplitudes des paraboles entières auront une valeur double, c'est-à-dire 19 696 et 20, 000 ; et telle est aussi l'amplitude de la parabole dont l'angle d'élévation est de 40 degrés, car elle diffère de l'angle de 45° par une même quantité.

AMPLITUDES DES DEMI-PARABOLES DECRITES PAR LE MEME *impeto*

Degrés		Degrés	Degrés		Degrés
45	10000		69	6.692	21
46	9994	44	70	6428	20
47	9976	43	71	6157	19
48	9945	42	72	5878	18
49	9902	41	73	5592	17
50	9848	40	74	5300	16
51	9782	39	75	5000	15
52	9704	38	76	4694	14
53	9612	37	77	4383	15
54	9511	36	78	4067	12
55	9396	35	79	3746	11
56	9272	34	80	3420	10
57	9136	33	81	3090	9
58	8989	32	82	2756	8
59	8829	31	83	2419	7
60	8659	30	84	2079	6
61	8481	29	85	1736	5
62	8290	28	86	1391	4
63	8090	27	87	1044	3
64	7880	26	88	698	2
65	7660	25	89	349	1
66	7431	24			
67	7191	23			
68	6944	22			

Problème – Proposition XIII

Etant donné les amplitudes des demi-paraboles, réunies dans la table précédente, et tout en conservant le même *impeto*, déterminer la hauteur de chaque demi-parabole.

Soit bc l'amplitude donnée, et soit ob, somme de la hauteur et de la sublimité, la mesure de 1'*impeto* qui, par définition, est constant; il faut trouver et déterminer la hauteur, ce que nous obtiendrons en divisant bo de telle manière que le rectangle contenu par ses parties soit égal au carré de la moitié de l'amplitude bc. EfFectuons cette division avec le point f, et coupons ob et bc en leur milieu par les points d et i respectivement.

Le carré de ib est égal au rectangle bfo, et le carré de do est égal à la somme du même rectangle et du carré de fd : si donc du carré de do est retranché le carré de bi, qui est égal au rectangle bfo, il restera le carré de fd, dont le côté df ajouté à la ligne bd donnera la hauteur cherchée bf. On procède donc ainsi à partir des données :

Du carré de la moitié de la ligne bo, qui est connue, retirez le carré de la ligne bi, qui est pareillement connue; prenez la racine carrée du reste, ajoutez-là à la ligne bd qui est connue, et vous obtiendrez la hauteur cherchée bf.

Exemple. Trouver la hauteur d'une demi-parabole décrite avec un angle d'élévation de 55 degrés. D'après, la table précédente, l'amplitude est 9 396 ; sa moitié est 4 698, et le carré de celle-ci 22 071 204 ; une fois ce carré retranché du carré de la moitié de bo, qui est toujours le même, soit 25 000 000, on a un reste de 2 928 796 dont la racine carrée est approximativement 1 710. Si on l'ajoute à la moitié de bo, c'est-à-dire à 5 000, on obtient 6 710, et ce chiffre mesure la hauteur bf.

Il ne sera pas inutile de présenter une troisième table, contenant les hauteurs et les sublimités des demi-paraboles dont l'amplitude est constante.

SAGREDO Je la verrai très volontiers, car, grâce à elle, je serai en mesure de connaître la différence d'*impeto* et de force qui est requise pour lancer un projectile à la même distance au moyen de ce que nous appelons tirs courbes ; et je crois que cette différence varie considérablement avec l'élévation au point que si l'on voulait lancer un boulet avec une élévation de 3 ou 4 degrés ou encore de 87 ou 88, aussi loin qu'avec une élévation de 45 (pour laquelle, comme on l'a montré, l'*impeto* est minimum), je crois qu'il faudrait un surcroît de force immense.

SALV. Votre estimation est tout à fait exacte ; et vous verrez que, si l'on désire exécuter la même opération, sous toutes les élévations, on s'avance à grand pas vers un *impeto* infini. Voyons maintenant la construction de la table.

HAUTEURS DES DEMI-PARABOLES DECRITES AVEC LE MEME *IMPETO*

Degrés		Degrés		Degrés		Degrés	
1	3	46	5.173	25	1.786	70	8.830
2	13	47	5.346	26	1.922	71	8.940
3	28	48	5.523	27	2.061	72	9.045
4	50	49	5.698	28	2.204	73	9.144
5	76	50	5.868	29	2.351	74	9.240
6	108	51	6.038	30	2.499	75	9.330
7	150	52	6.207	31	2.653	76	9.415
8	194	53	6.379	32	2.810	77	9.493
9	245	54	6.546	33	2.967	78	9.567
10	302	55	6.710	34	3.128	79	9.636
11	365	56	6.873	35	3.289	80	9.698
12	432	57	7.033	36	3.456	81	9.755
13	506	58	7.190	37	3.621	82	9.806
14	585	59	7.348	38	3.793	83	9.851
15	670	60	7.502	39	3.962	84	9.890
16	760	61	7.649	40	4.132	85	9.924
17	855	62	7.796	41	4.302	86	9.951
18	955	63	7.939	42	4.477	87	9.972
19	1.060	64	8.078	43	4.654	88	9.987
20	1.170	65	8.214	44	4.827	89	9.998
21	1.285	66	8.346	45	5.000	90	10.000
22	1.402	67	8.474				
23	1.527	68	8.597				
24	1.685	69	8.715				

Proposition XIV

Déterminer, pour chaque degré d'élévation, la hauteur et la sublimité des demi-paraboles dont l'amplitude est constante.

Le résultat peut être obtenu facilement : à supposer en effet que l'amplitude de la parabole soit toujours de 10.000 parties, la moitié de la tangente, peur un degré quelconque d'élévation, donnera la hauteur. Si nous prenons, par exemple, la demi-parabole dont l'angle d'élévation est 30 degrés et si son amplitude, comme on l'a admis, est de 10 000 parties, alors sa hauteur représentera 2 887 [de ces parties], car telle est approximativement la moitié de la tangente. Une fois la hauteur trouvée, on établira la sublimité de la façon suivante. Comme il a été démontré que la moitié de l'amplitude d'une demi-parabole est moyenne proportionnelle entre la hauteur et la sublimité, que d'autre part la hauteur est déjà connue et que la moitié de l'amplitude demeure constante (équivalant à 5 000 parties), il résulte que si l'on divise le carré de cette demi-amplitude par la hauteur, on obtiendra la sublimité cherchée. Ainsi, dans notre exemple, nous avions trouvé une hauteur de 2 887 ; le carré de 5 000 est 25 000 000, lequel, divisé par 2 887, donne 8.659 pour valeur approchée de la sublimité.

SALVIATI Nous voyons donc, avant toutes choses, combien est vraie la constatation faite précédemment, que plus l'angle d'élévation s'éloigne de la moyenne, soit vers le haut soit vers le bas, plus l'*impeto*, requis pour lancer le projectile à la même distance augmente. Car comme cet *impeto*, tout en résultant du mélange de deux mouvements, l'un horizontal uniforme et l'autre perpendiculaire naturellement accéléré, peut être mesuré par la somme de la hauteur et de la sublimité, on voit, d'après la table proposée, que cette somme est minima pour l'élévation de 45 degrés, là où la hauteur et la sublimité sont égales, chacune valant 5 000 et leur somme 10 000. Si nous prenions au contraire un angle d'élévation supérieur, par exemple 50 degrés, nous trouverions pour la hauteur 5 959 et pour la sublimité 4 196, c'est-à-dire au total 10 155, et c'est le même total que nous trouverions encore pour l'*impeto* correspondant à une élévation de 40 degrés, puisque l'une, et l'autre sont également éloignées de la moyenne. D'où l'on doit noter, en deuxième 'Lieu, que des *impeto* égaux sont bien requis pour des élévations rigoureusement équidistantes de la moyenne, en ajoutant cette belle symétrie, qui fait que la hauteur et la sublimité de l'élévation la plus grande correspondent, mais inversement, à la hauteur et à la sublimité de l'élévation la plus petite. Ainsi, dans l'exemple proposé, qui est celui de l'élévation de 50 degrés, la hauteur est de 5 959 et la sublimité 4 196 pour l'élévation de 40 degrés au contraire la hauteur sera de 4 196 et la sublimité de 5 959 ; et il en va de même pour tous les autres cas, sans aucune différence, à ceci près que pour éviter des calculs fastidieux on a négligé quelques fractions, ce qui sui des nombres aussi élevés est peu important et sans inconvénient réel.

SAGREDO J'observe en ce qui concerne les deux *impeto*, l'horizontal et le perpendiculaire, que plus la projection est élevée, d'autant diminue l'importance de l'*impeto* horizontal, et augmente celle de l'*impeto* vertical; au contraire dans les tirs peu élevés, où le projectile doit être lancé à une faible hauteur, il convient que soit considérable la force, de l'*impeto* horizontal. Mais si le comprends fort bien que dans le cas de l'élévation maxima, soit 90°, toute la force du monde, ne suffirait pas pour écarter le projectile d'un seul doigt de la perpendiculaire et que nécessairement il doit retomber à l'endroit même d'où il a été lancé, ependant je n'oserais pas affirmer avec la même certitude que dans le cas d'une élévation nulle, c'est–à-dire d'un tir à l'horizontale, seule une force infinie pourrait conférer au projectile une trajectoire, vraiment rectiligne en sorte, par exemple, que même une couleuvrine tirant de niveau, donc sans aucune élévation, serait incapable de projeter horizontalement un boulet de fer. Je dis qu'ici j'éprouve quelque embarras : et si je n'écarte pas radicalement cette éventualité, C'est que j'en suis empêché par un autre phénomène, apparemment non moins étrange, et pour lequel néanmoins je possède; une démonstration nécessaire. Ce phénomène, c'est l'impossibilité de tendre, une corde de telle manière qu'elle reste parfaitement droite et parallèle à l'horizon, l'expérience prouvant que toujours elle s'incurve et se plie, sans qu'aucune force parvienne à la rendre vraiment droite.

TABLE CONTENANT LES HAUTEURS ET LES SUBLIMITES

DES DEMI-PARABOLES AYANT UNE AMPLITUDE IDENTIQUE,

COMPTEE POUR 10000,

ET CALCULEE POUR CHAQUE DEGRE D'ELEVATION

Degrés	Hauteurs	Sublimités	Degrés	Hauteurs	Sublimités
1	87	286.533	25	2.332	10.722
2	175	142.450	26	2.439	10.253
3	262	95.802	27	2.547	9.814
4	349	71.531	28	2.658	9.404
5	437	57.142	29	2.772	9.020
6	525	47.573	30	2.887	8.659
7	614	40.716	31	3.008	8.336
8	702	35.587	32	3.124	8.001
9	792	31.565	33	3.247	7.699
10	881	28.367	34	3.373	7.413
11	972	25.720	35	3.501	7.141
12	1.063	23.518	36	3.633	6.882
13	1.154	21.701	37	3.768	6.635
14	1.246	20.056	38	3.906	6.395
15	1.339	18.663	39	4.049	6.174
16	1.434	17.405	40	4.196	5.959
17	1.529	16.355	41	4.346	5.752
18	1.624	15.389	42	4.502	5.553
19	1.722	14.522	43	4.662	5.369
20	1.820	13.736	44	4.828	5.171
21	1.919	13.024	45	5.000	5.000
22	2.020	12.376	46	5.177	4.828
23	2.123	11.778	47	5.363	4.662
24	2.226	11.230	48	5.553	4.502
49	5.752	4.345	70	13.237	1.819
50	5.959	4.196	71	14.521	1.721
51	6.174	4.048	72	15.388	1.624
52	6.399	3.906	73	16.354	1.528
53	6.635	3.765	74	17.437	1.433
54	6.882	3.632	75	18.660	1.339
55	7.141	3.500	76	20.054	1.246
56	7.413	3.372	77	21.657	1.154
57	7.699	3.247	78	23.523	1.062

1 Le plan du texte de Galilée

1. Introduction.
2. Les deux propriétés mathématiques de la parabole utilisées.
3. Réflexion mécanique sur le mouvement de chute.
4. Mise en place des éléments mécaniques et de leur description sur la parabole.
5. Détermination de l'*impeto* en chaque point de la parabole.
6. Lien mécanique entre *amplitude, sublimité et hauteur.*
7. Les 45°, cas particulier et la symétrie par rapport à 45°.
8. Si l'on a $\frac{h_1}{S_1} = \frac{S_2}{h_2}$, alors les amplitudes sont les mêmes et l'*impeto* également.
9. *Impeto* et amplitude fournissent la hauteur.
10. Table de même *impeto*

2 Introduction

Les deux premières journées des Discours de Galilée sont consacrées à la résistance des matériaux, et les deux suivantes sont consacrées à l'étude du mouvement. Galilée divise cette dernière étude en trois parties. Les deux premières abordent le mouvement uniforme, puis le mouvement uniformément accéléré et cela constitue la troisième journée. La quatrième journée est consacrée au "mouvement violent", c'est-à-dire au mouvement d'un projectile. Cette dernière étude est un aboutissement; elle vient à la fin du livre comme dernier chapitre. C'est la fin d'un crescendo dans la difficulté des problèmes traités. La difficulté est mécanique, et on commence par le mouvement rectiligne uniforme, puis on aborde le mouvement uniformément accéléré et finalement la composition des deux dans le mouvement du projectile.

Difficulté mathématique puisque les premiers mouvements constituent un problème linéaire, alors que les seconds sont quadratiques. La difficulté du dernier réside dans la manière de composer les deux premiers.

Dans la recherche que j'aborde à présent, je m'efforcerai de mettre en lumière et d'établir sur de fermes démonstrations certaines des conséquences particulièrement importantes et dignes d'être connues, qu'entraîne pour un mobile le fait d'être animé d'un double mouvement, à savoir un mouvement uniforme et un mouvement naturellement accéléré : car de ce genre paraît bien être le mouvement que nous attribuons aux projectiles.[2]

Galilée poursuit en décrivant la génération d'un tel mouvement. Il rappelle brièvement les éléments qui ont déjà été établis dans les chapitres précédents de son livre et que l'enseigné doit avoir à l'esprit.

J'imagine qu'un mobile a été lancé sur un plan horizontal d'où l'on a écarté tout obstacle; il est déjà certain, d'après ce qu'on a dit ailleurs plus longuement, que son mouvement se poursuivra uniformément et éternellement sur ce même plan, pourvu qu'on le prolonge à l'infini.[3]

Il rappelle le principe d'inertie: en l'absence de forces extérieures, un solide poursuit éternellement son mouvement rectiligne uniforme. Cela étant acquis, que va-t-on modifier à présent?

Supposons en revanche que le plan *soit limité et situé à une certaine hauteur : le mobile que j'imagine doué de gravité, parvenu à l'extrémité du plan et continuant sa course, ajoutera à son précédent mouvement uniforme et indélébile la tendance vers le bas que lui confère sa gravité: le résultat sera ce mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas que j'appelle projection.* [4]

Tout est dit, la description est parfaite, il reste à la mathématiser pour permettre

[2] *Discorsi*, p. 205.
[3] *Discorsi*, p. 205.
[4] *Discorsi*, p. 205.

la mesure grâce à l'expérience. Telle sera la tâche effectuée dans la suite du chapitre qui se termine sur un tableau de mesures expérimentales.

Les deux propriétés mathématiques de la parabole utilisées.

La première propriété : une sorte d'équation de la parabole

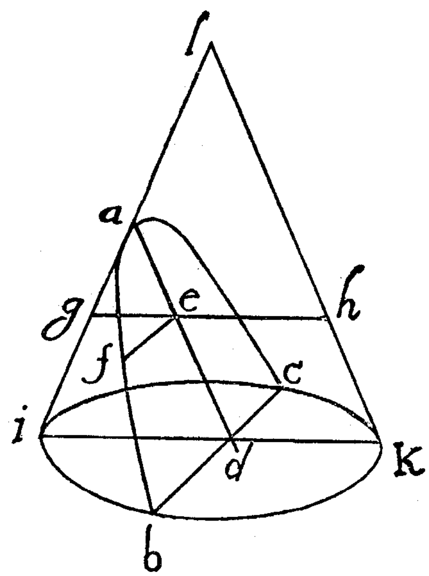

Figure 8: La parabole comme section conique chez Galilée

Cette première proposition est présentée sous la forme suivante, f étant un point quelconque de la parabole, intervention d'un cône droit avec un plan parallèle à une génératrice lh (Fig.**??**),

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae}.$$

La démonstration, celle d'Apollonius mais elle est refaite pour le profit du lecteur supposé sans accès à un livre de référence, est faite dans l'espace, sur un cône où il trace un cercle parallèle à la base et passant f. Sur le cercle de base, on a la relation de la puissance du point d

$$bd^2 = id.dk.$$

De même dans le cercle supérieur

$$fe^2 = ge.eh.$$

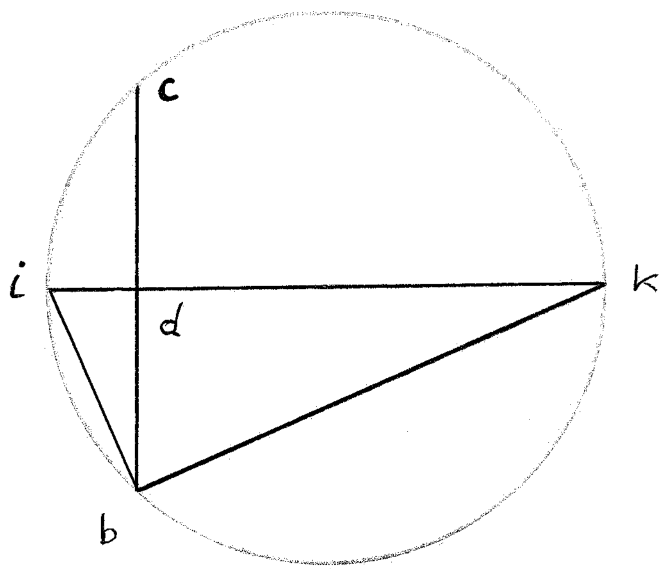

Figure 9: Coupe horizontale du cône

Pour montrer ces relations de puissance, reproduisons le cercle de base $ibkc$ avec le point d qui se trouve dans le plan de la parabole et qui, dans ce cercle, est projection sur l'axe ik de c comme de b. Le théorème de Pythagore nous donne

$$ik^2 = ib^2 + kb^2.$$

Et l'on peut introduire $ik = id + dk$

$$id^2 + dk^2 + 2id.dk = ib^2 + kb^2$$

Mais avec le théorème de Pythagore encore, $ib^2 = id^2 + db^2$ et $kb^2 = dk^2 + db^2$

Donc

$$id^2 + dk^2 + 2id.dk = id^2 + db^2 + dk^2 + db^2.$$

soit

$$id.dk = db^2.$$

En divisant la première relation par la seconde pour les deux cercles, on obtient

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id.ik}{ge.eh}.$$

Par construction, $ed//hk$ et $eh//dk$ donc $eh = dk$ et la relation devient

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id}{ge}.$$

Mais les points *agide* sont dans le plan de la parabole et forment un triangle.

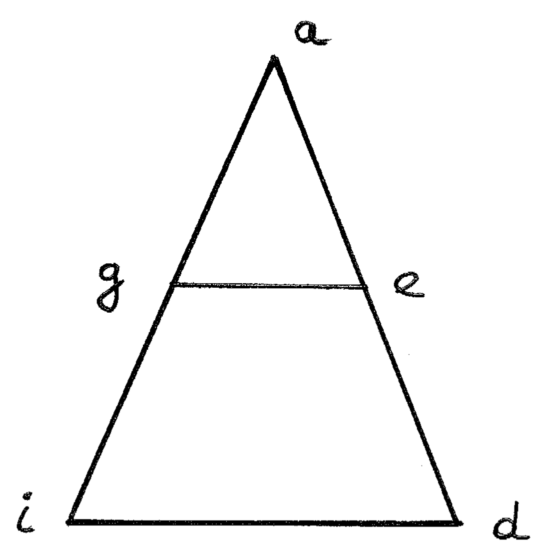

Figure 10: Section transversale du cône

On a par

$$\frac{id}{ge} = \frac{da}{ae}.$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae}.$$

Il nous appartient à présent de nous interroger sur le sens de cette propriété. Plaçons-nous dans le plan de la parabole et rappelons l'équation $y = ax^2$.

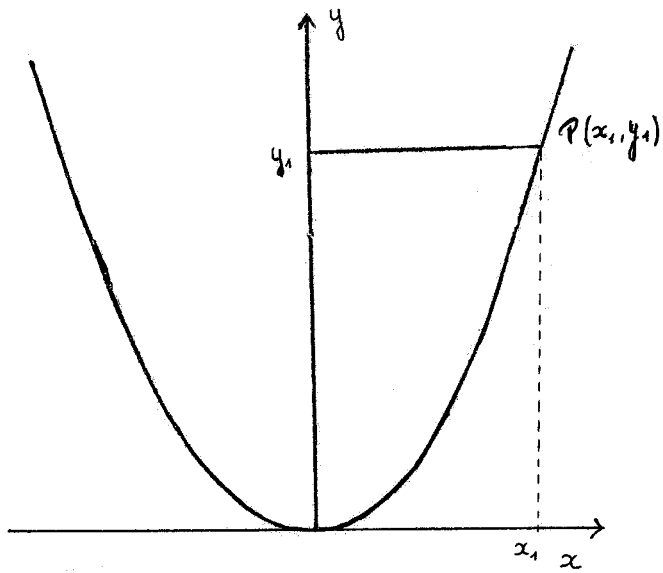

Figure 11: La parabole en coordonnées cartésiennes

Relisons sur la figure la relation établie en la traduisant dans un langage qui nous est plus habituel, celui des coordonnées x et y que Descartes allait introduire en 1637.

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae},$$
$$\frac{{x_1}^2}{{x_2}^2} = \frac{y_1}{y_2},$$

où nous voyons apparaître une relation entre les coordonnées (x_1, y_1) du point b et les coordonnées (x_2, y_2) d'un autre point f de la parabole. L'apparition d'un tel rapport ne doit pas nous étonner à une époque où la théorie des proportions est constamment maniée. On l'a bien vu par la démonstration même de Galilée. Le fait que les coordonnées (x, y) soient reliées par la relation $x^2 = y$, autrement dit par l'équation de la parabole, est donc la propriété qui sous-tend celle de Galilée. Seule change

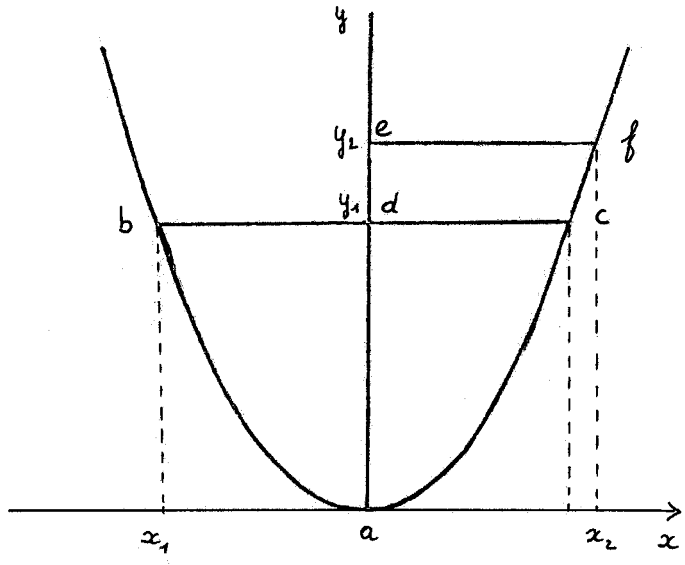

Figure 12: Lecture de la relation donnée par Galilée

la présentation de cette équation. Galilée utilise non pas deux coordonnées, mais quatre, correspondant à deux points: quels que soient deux points de la parabole, le rapport de leurs distances à l'axe vertical, bd ou fe, doit être égal au rapport des carrés des distances à l'axe horizontal da et ae.

2.1 La seconde propriété

Cette propriété donne une construction de la tangente en un point quelconque de la parabole :

L'énoncé sous forme de propriété serait : Si db est tangente à la parabole en b elle coupe l'axe de la parabole en un point d symétrique de la projection c de b sur l'axe, c'est-à-dire tel que $ca = ad$.

La démonstration se fait par l'absurde. Admettons que la droite issue de b et qui coupe l'axe en d de manière à ce que $da = ac$, recoupe la parabole en un autre point g.

On trace fge perpendiculaire à l'axe de la parabole. Si f est au delà de b (partie

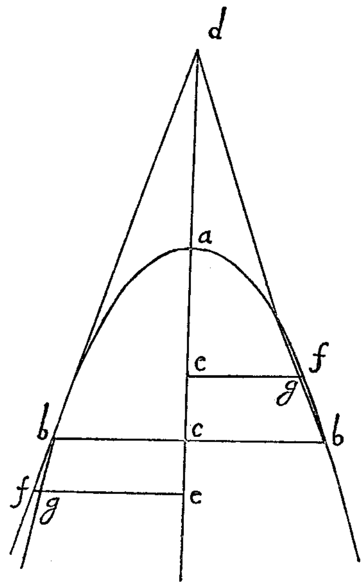

Figure 13: Propriété de la tangente chez Galilée, deuxième figure

gauche de la figure) comme fe est plus grand que ge, on aura

$$\frac{fe^2}{bc^2} > \frac{ge^2}{bc^2}.$$

Par la proposition précédente, on sait que

$$\frac{fe^2}{bc^2} = \frac{ea}{ac},$$

et donc

$$\frac{ea}{ac} > \frac{ge^2}{bc^2}.$$

En considérant les triangles dge et dbc de cette même figure, on a la relation de similitude

$$\frac{ge^2}{bc^2} = \frac{ed^2}{cd^2}$$

et donc

$$\frac{ea}{ac} > \frac{ed^2}{cd^2}.$$

Mais par construction $ac = ad$, donc

$$\frac{ea}{ac} = \frac{ea}{ad},$$

en multipliant haut et bas par $4ad$ on obtient

$$\frac{ea}{ad} = \frac{4ea.ad}{4ad.ad}$$

Comme $2ad = cd$, on trouve

$$\frac{ea}{ad} = \frac{4ea.ad}{cd^2},$$

qui doit être plus grand que

$$\frac{ed^2}{cd^2.}$$

C'est-à-dire

$$4ea.ad > ed^2,$$

ce qui est faux, parce que ainsi a ne peut être au milieu de ed. Par construction en effet a est au milieu de cd et e et c sont distincts. Pour le montrer, Galilée fait appel à une proposition d'Euclide: dans un segment de découpé en deux parties égales par p et en parties inégales par a, on a

$$ea.ad < dp^2.$$

Puisque dp est la moitié de ed

$$4dp^2 = de^2.$$

Soit

$$4ea.ad < ed^2,$$

ce qui est l'égalité contraire.

L'inégalité du lemme d'Euclide peut se voir immédiatement sur la figure 15 puisque l'aire du rectangle $ea.ad$ est égale à l'aire du carré dp^2 moins l'aire du petit carré hachuré pa^2. On retrouve algébriquement ce même petit carré en comparant

Figure 14: Lemme d'Euclide

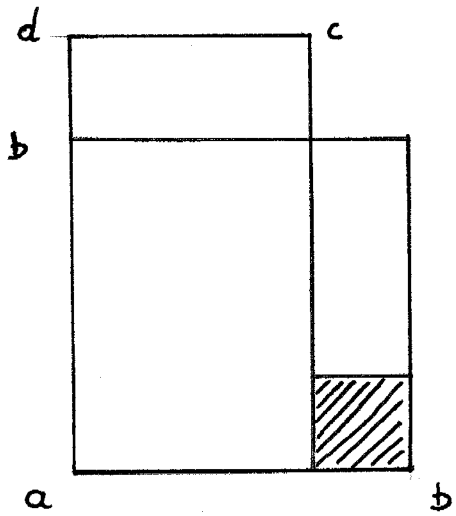

Figure 15: Démonstration géométrique du lemme d'Euclide

l'expression de

$$\begin{aligned} ep^2 &= ep.ea + ep.ap) \\ &= dp.ea + ep.ap \\ &= dp.ea + ea.ap + ap^2 \\ &= (dp + pa)ea + ep^2 \\ &= ad.ea + ap^2 \end{aligned}$$

Réflexion purement mécanique sur le mouvement de chute.

Galilée décrit le mouvement[5] d'un corps lancé sur un plan horizontal qui s'arrête en un point b.

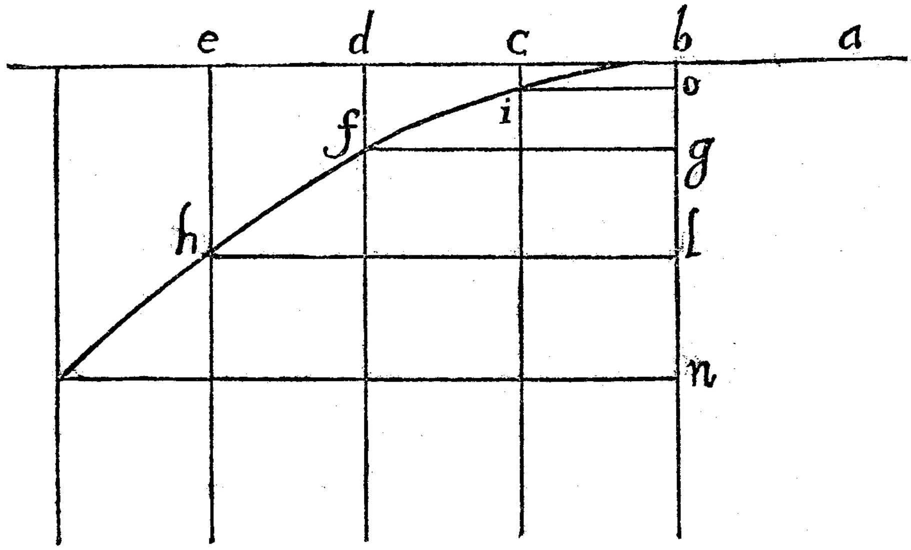

Figure 16: Figure de Galilée sur le mouvement de chute

Soit une ligne horizontale ou un plan ab, situé en hauteur, et sur lequel un mobile se meut d'un mouvement uniforme de a vers b.[6]

Ce corps parcourt donc des espaces égaux en des temps égaux.

Si le support que fournit le plan disparaît en b, le mobile acquerrera en outre, du fait de sa gravité, un mouvement naturel vers le bas le long de la perpendiculaire bn.[7]

Ce mouvement de chute verticale simple a déjà été étudié par Galilée. Il sait que le corps parcourt en tombant des espaces qui sont comme les carrés des temps.

[5] cf. supra

[6] *Discorsi*, p. 208.

[7] *Discorsi*, p. 208.

Donc si l'on commence avec un temps $= 1, 2, 3, etc.$, on aura la série $1, 4, 9, \ldots$ Galilée poursuit en prenant bc comme axe des temps

Prolongeons directement le plan ab par la ligne be, pour représenter l'écoulement ou la mesure du temps, et sur celle-ci marquons arbitrairement du nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, bc, cd, de[8].

Des points b, c, d, e, *abaissons des lignes équidistantes de la parallèle bn; sur la première de celles-ci prenons une distance quelconque ci, puis sur la suivante une distance quadruple df, sur la troisième une distance neuf fois plus grande eh, et ainsi de suite sur les autres lignes en suivant la proportion des carrés de* cb, db, eb, *ou encore en raison double de ces mêmes lignes.*[9].

C'est la construction point par point de la courbe de chute en combinant, sans interférence, un mouvement rectiligne et uniforme et un mouvement accéléré vertical. Il reprend son explication en termes plus mécaniques. Sur ae le mobile a, dû à son inertie, un mouvement rectiligne et uniforme. La distance qu'il parcourt est directement proportionnelle au temps. Après un temps bc, il a parcouru une distance bc. En même temps il tombe verticalement d'un mouvement accéléré . Les espaces verticaux qu'il parcourt dans sa chute son proportionnels aux carrés des temps. Pendant qu'il parcourt bc, il tombe de ci et se trouve donc en i. Après le temps db, il aura parcouru vers le bas une distance quadruple de ci, il sera en f. Retraçant verbalement la (Fig.16), Galilée aboutit à

$$\frac{fg^2}{io^2} = \frac{gb}{bo}.$$

Ce qui est la première propriété mathématique de la parabole donnée par Galilée, où nous avons reconnu l'équation $y = ax^2$. Galilée démontre ensuite la réciproque par l'absurde, puis Sagredo souleve une objection. *On ne peut nier que le raisonnement soit nouveau, ingénieux et concluant; il n'en procède pas moins ex suppositione, car il suppose que le mouvement transversal demeure toujours uniforme, que le mouvement*

[8] *Discorsi*, p. 208-209.
[9] *Discorsi*, p. 209.

vers le bas conserve de même son mode propre qui est d'accélérer constamment en proportion du carré des temps, enfin que ces mouvements et leurs vitesses en se combinant, ne s'altèrent ni ne se gênent, en sorte que la trajectoire du projectile, tout au long du mouvement, ne subit aucune transformation de nature: or cela à mon avis est impossible[10].

Il souligne ainsi le fait que les deux mouvements ne doivent en aucun cas interférer.

Mise en place des éléments mécaniques et de leur description sur la parabole.

Le Théorème III, Proposition III traite de la chute verticale accélérée qui a déjà été utilisé du point de vue mathématique. Galilée y donne une relation entre l'*impeto* en un point quelconque et en un point de référence. Ce point de référence, noté c sur la figure, est tel que ac représente à la fois le temps de la chute, le trajet et l'*impeto*. L'*impeto* est une grandeur encore imprécise chez Galilée. Selon lui, un poids acquiert un certain *impeto* après une chute d'une certaine hauteur. Pour nous, il est lié à l'énergie cinétique, et serait proportionnel au carré de la vitesse. Mais Galilée l'utilise aussi comme une impulsion. Cette fois, l'*impeto* serait proportionnel à la vitesse. Il n'est pas possible de lever cette ambiguïté, une ambiguïté qui va se perpétuer.

La relation que Galilée établit est

$$\frac{imp_b}{imp_c} = \frac{as}{ac}.$$

Marquons as moyenne proportionnelle entre ba et ac : nous allons démontrer que l'impeto en b est à l'impeto en c comme la ligne sa est à la ligne ac[11].

[10] *Discorsi*, p. 210.
[11] *Discorsi*, p. 216.

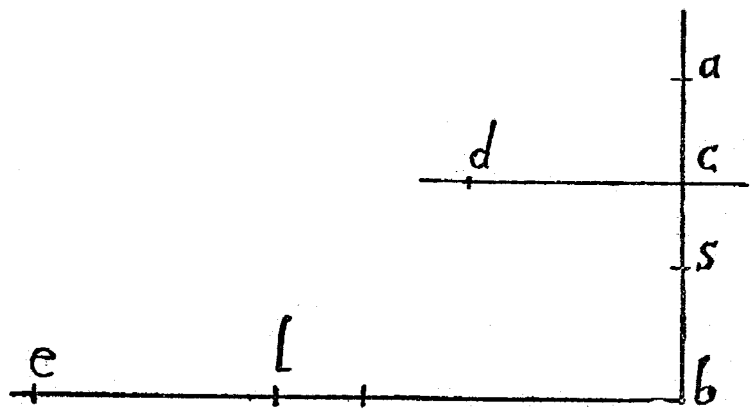

Figure 17: Galilée établit des proportions entre l'espace vertical parcouru, le temps de parcours et l'*impeto* acquis

Le fait que as soit moyenne proportionnelle revient à écrire

$$\frac{ba}{as} = \frac{as}{ac}$$

ou

$$as^2 = ba.ac.$$

Galilée revient sur cette moyenne proportionnelle un peu plus loin dans son texte.

Dans le mouvement naturellement accéléré la vitesse augmente ou diminue, non en proportion des espaces mais des temps, et ceux-là, comme il a été démontré, varient comme les carrés de ceux-ci[12].

Après avoir fixé à notre guise, et au moyen d'une seule grandeur, l'expression de ces trois quantités fort différentes, savoir l'espace, le temps et l'impeto, [après le premier élément de temps] *proposons nous de déterminer pour la hauteur ac, et le temps que durera la descente de a en c, et l'impeto que le mobile aura acquis au point final c - l'évaluation s'effectuant par rapport au temps et à l'impeto mesurés pour la distance ab.*

Il s'agit en fixant la distance ab de fixer les unités de mesures.

[12] *Discorsi*, p. 221.

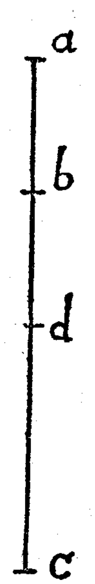

Figure 18: Détermination de la vitesse de la chute accélérée en un point, Galilée

Questions auxquelles on répondra en prenant ad moyenne proportionnelle entre ac et ab, et en affirmant que le temps requis pour descendre le long de ac tout entier est comme le temps ad vis-à-vis du temps ab, par lequel on a figuré initalement le temps requis pour franchir ab. Nous dirons pareillement que l'impeto ou degré de vitesse que possédera le grave au point c est avec l'impeto qu'il possédait en b dans le même rapport que la ligne ad à la ligne ab, la vitesse, comme on sait, croissant en proportion directe du temps[13].

Galilée nous dit que *as* mesure le temps de chute de a à b. Autrement dit le rapport qu'il trouve dit que les *impeto* sont dans le rapport des temps de chute.

Ainsi apparaît clairement le moyen de mesurer l'impeto, ou moment de vitesse, sur la ligne où a lieu le mouvement de descente, et cet impeto par définition augmente en raison directe du temps[14].

Galilée marque une pause.

Toutefois, avant d'aller plus loin ... nous sommes dans l'obligation de définir

[13] *Discorsi*, p. 222.
[14] *Discorsi*, p. 217.

une commune mesure à l'aide de laquelle mesurer la vitesse, l'impeto ou le moment de l'un et l'autre mouvement; de plus comme les degrés de vitesse d'un mouvement uniforme sont innombrables, et qu'un seul entre tous ces degrés (et non n'importe lequel) doit être réuni et composé avec le degré de vitesse acquis grâce au mouvement naturellement accéléré[15].

Galilée veut dire ici que l'on peut donner un mouvement rectiligne uniforme équivalent à n'importe quelle vitesse. Il s'agit donc de se donner la vitesse uniforme. Le *mouvement naturellement accéléré* a par contre un degré de vitesse en chaque point car Galilée admet tacitement que le corps part du repos.

Comment va-t-il déterminer la vitesse uniforme?

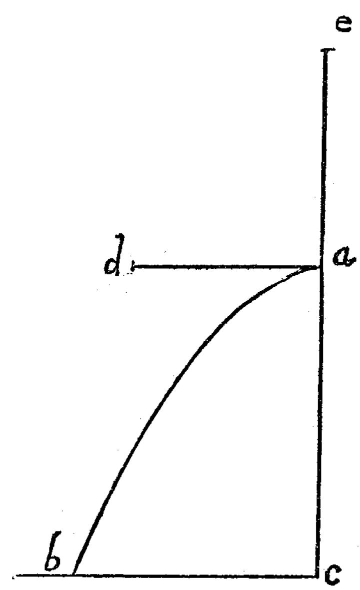

Figure 19: Galilée calcul de l'*impeto* après une chure parabolique d'une hauteur déterminée

Pour mieux me faire comprendre, soit la perpendiculaire ac, élevée sur l'horizontale bc; ac sera la hauteur et cb l'amplitude de la demi-parabole ab, laquelle est engendrée par la composition de deux mouvements, dont l'un est celui du mobile quand il de-

[15] *Discorsi*, p. 210.

scend le long de ac, partant du repos en a, d'un mouvement naturellement accéléré, et dont l'autre est le mouvement uniforme transversal sur l'horizontale ad. L'impeto acquis en c après la descente ac est déterminé par la grandeur de cette même hauteur ac : unique et toujours semblable en effet est l'impeto d'un mobile tombant de la même hauteur; en revanche sur l'horizontale ce n'est pas un, mais d'innombrables degrés de vitesse qui peuvent être assignés aux mouvements uniformes. Afin de pouvoir isoler de tous les autres, et pour ainsi dire montrer du doigt, celui que je choisirai, je prolongerai la hauteur ca vers le haut et marquerai sur la ligne ainsi obtenue selon les besoins, la sublimité ae : car si je me représente un mobile tombant de cette sublimité, à partir du repos en e, il est évident que l'impeto qu'il acquerra au point a sera le même que celui avec lequel je l'imaginerai en train de se mouvoir, après conversion de son mouvement, sur l'horizontale ad; et ce degré de vitesse sera précisément celui par lequel, dans un temps égal à celui de sa descente le long de ea, il parcourra sur l'horizontale un espace double de la même distance ea[16].

Galilée compose un mouvement vertical naturellement accéléré, partant du repos en a avec un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est déterminée de la manière suivante : Le coprs est laché sans vitesse initale au point e, il tombe ensuite librement de e en a où on le dévie horizontalement. Il aura dont en a une vitesse qui pour nous est déterminée par la relation

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pour Galilée, c'est le degré de vitesse acquis après la chute ea qui est lié à l' *impeto* acquis après cette chute. Pour comprendre cette curieuse manière de mesurer la vitesse, il faut rappeler que la mesure du temps est difficile pour Galilée. Les résultats de ces mesures sont mauvaises, ce qui rend mauvaises les mesures de la vitesse comme nous l'entendons. Une longueur, ou une hauteur se mesure beaucoup plus aisément et beaucoup plus précisément.

L'idée qui consiste à laisser tomber verticalement un objet sur sa trajectoire est

[16] *Discorsi*, p. 217.

jugée digne de Platon par Galilée. L'idée originale qui ne semble pas être chez Platon consiste à transformer un mouvement de chute rectiligne et accélérée d'une planète en un mouvement circulaire et perpétuel. Telle eut été la manière de procédé par Dieu au moment de la création pour choisir les vitesses de rotation des planètes. Notons qu'en 1738, Daniel Bernoulli dans ses *Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur,*[17] fixera encore de cette manière les conditions initiales dans le cas des mouvements planétaires. L'idée de Galilée est plus générale que l'idée originale attribuée à Platon puisqu'il ne s'agit pas d'une planète, ni d'un mouvement circulaire.

Les éléments mécaniques ayant été présentés, il faut à présent mettre en place les éléments mathématiques correspondants.

On notera en outre que j'appelle "amplitude" de la demi-parabole ab l'horizontale cb; "hauteur" c'est-à-dire ac, l'axe de la même parabole; mais que je nomme "sublimité" la ligne ea dont le franchissement en chute libre, détermine l'impeto horizontal.

Ces définitions ne correspondent pas à des grandeurs intrinsèques de la parabole; aucun lien avec l'emplacement du foyer ou de la directrice n'est donné avec le paramètre.

Détermination de l'*impeto* en chaque point de la parabole.

Pour ce faire, Galilée présente dans le Problème I - Proposition IV, une situation à première vue particulière.

Soit la demi-parabole bec dont cd est l'amplitude, db la hauteur, et qui, prolongée vers le haut, rencontre en a la tangente à la parabole ca. Si l'amplitude cd est égale

[17] Commentarii academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Vol. X, 1738 (1747), pp. 116-124, reproduit dans *Die Werke von Daniel Bernoulli,* Vol. 3, Basel, Birkhäuser, 1987, p. 160.

à la hauteur totale da, bi sera égal à ba et bd[18] .

En effet, il prend le cas d'une tangente à 45°. Comme nous le verrons l'angle de 45° va jouer un rôle important dans la suite, on est tenté de croire à une simplification injustifiée de Galilée. Mais regardons les choses autrement. Toute parabole à en un certain point une tangente à 45°. Quel est ce point? Il s'agit du point d'où une perpendiculaire à l'axe rencontre l'axe au foyer. Si nous regardons la parabole placée, comme l'entend Galilée, verticalement avec le sommet au plus haut, cette perpendiculaire est horizontale. Il s'agit ici de l'amplitude *cd*. Dans ce cas toujours, la hauteur Galiléenne *bd* est la distance focale, le foyer est en *d*. Et la sublimité *ab* qui est égale à la distance focale représente la distance du sommet à la directrice. La sublimité comme la hauteur sont le demi paramètre de la parabole. En définissant la parabole au moyen de la tangente à 45°, Galilée ne fait rien d'autre que définir le paramètre de la parabole. Il ne traite donc pas un cas particulier. Mais retenons que pour Galilée la hauteur n'est pas synonime de demi paramètre. La hauteur n'est le demi paramètre que si on considère la chute jusqu'à ce point particulier où la tangente est de 45°. Après cette digression importance reprenons le sujet réel de la Proposition IV. Il s'agit de déterminer l'*impeto* en un point quelconque de la parabole définie de la manière qui vient d'être décrite. Le résultat est obtenu en composant en chaque point de la parabole l'*impeto* dû au mouvement rectiligne uniforme avec celui qui en ce point est dû au mouvement de chute naturelle et accélérée. La composition se fait suivant la loi connue du parallélogramme que Galilée est autorisé à utiliser en chaque point car l'*impeto* dû à la chute verticale accélérée est fixe et connue en chaque point même si elle varie de point en point. l'*impeto* dû au mouvement rectiligne uniforme est toujours le même ici *ib*. Il s'agit d'un *impeto* unitaire dû à une chute d'une distance unitaire en un temps unitaire. l'*impeto* dû au mouvement accéléré se détermine en chaque point de la manière suivante :

Marquons sur la parabole un point quelconque e, où il s'agit de déterminer l'impeto du projectile. Menons l'horizontale ef et prenons bg moyenne proportion-

[18] *Discorsi*, p. 219.

nelle entre bd et bf [les distances verticales parcourues jusqu'à d et jusqu'à e] *comme ab, ou bd, donne par convention la mesure du temps et du moment de vitesse produit par la chute bd à partir du repos en b, le segment bg donnera le temps ou plutôt la mesure du temps et del'impeto au point f quand le mobile vient de b*[19].

Ce qui permet à Galilée de conclure en appliquant la loi du parallélogramme.

Si donc nous prenons bo égal bg et traçons la diagonale ao, celle-ci représentera la grandeur de l'impeto au point e.[20]

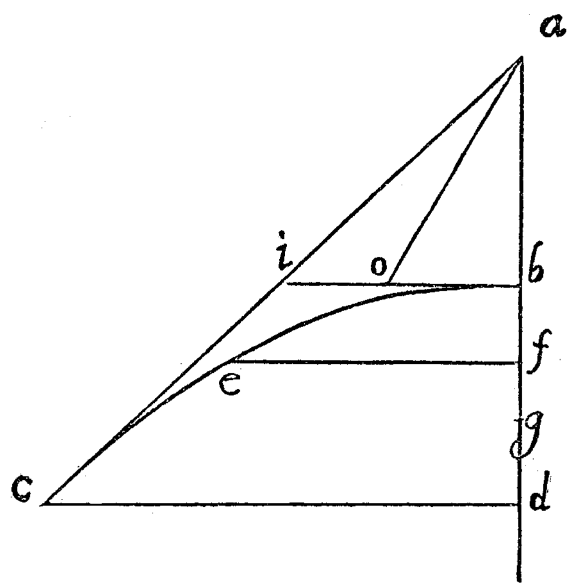

Figure 20: Calcul de l'*impeto* en chaque point de la parabole

Lien mécanique entre *amplitude, sublimité et hauteur*.

Galilée pose dans Proposition V une sorte de problème inverse. Il ne s'agit plus de déterminer la trajectoire parabolique suivie par un projectile mais étant donnée une parabole de déterminer de quelle hauteur il faut laisser tomber un poids pour qu'il

[19] *Discorsi*, p. 219-220.
[20] *Discorsi*, p. 220.

parcourt cette parabole. La parabole est définie encore une fois par un de ses points et la tangente en ce point. Mais cette fois, il ne s'agit plus du point particulier où la tangente est de 45°.

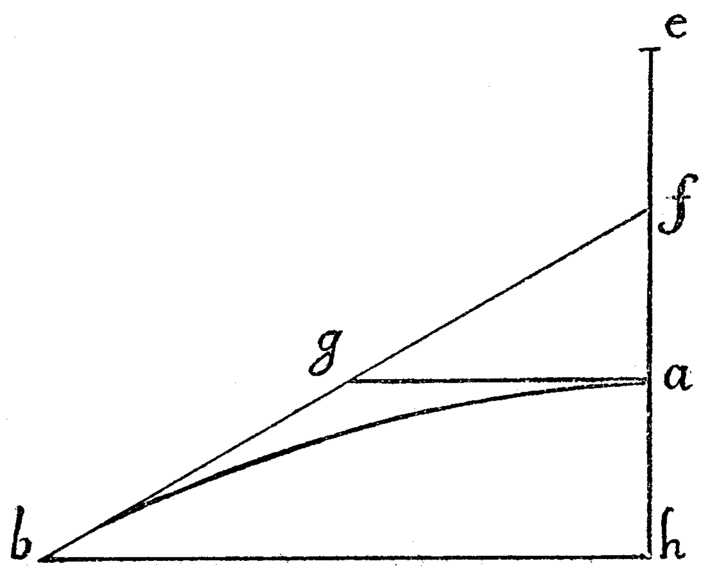

Figure 21: illustration de la relation entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Soit ab la parabole, hb son amplitude, et he l'axe prolongé sur lequel il s'agit de découvrir la sublimité à partir de laquelle un corps, tombant en chute libre, puis déviant sur une ligne horizontale l'impeto acquis en a, décrirait la parabole ab.[21]

Le point f de la tangente est le symétrique de h par rapport au sommet a. La tangente détermine sur la tangente au sommet la grandeur de l'*impeto* en a parce que l'*impeto* au sommet est la moitié[22] de l'espace parcouru la hauteur franchie, c'est-à-dire en h et que c'est une propriété de la tangente que d'être coupée en son milieu par la tangente au sommet. Il reste à trouver de quel point il faut descendre

[21] *Discorsi*, p. 226.

[22] La provenance de ce multiple 2 n'est pas très claire chez Galilée. Il fait penser au $\frac{1}{2}$ de la formule

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

pour avoir l'*impeto* correspondant.

Enfin faisons ae troisième proportionnelle entre fa et ag. Je dis que e est le point cherché[23].

Il a donc

$$\frac{fa}{ag} = \frac{ag}{ae},$$

ce qui peut encore se lire ag est moyenne proportionnelle entre ea et fa. Comme fa est égale à ah, la hauteur, il a obtenu une relation entre la sublimité et la hauteur. La troisième terme est la moitié de l'amplitude bh. La relation supra peut donc aussi s'écrire

$$\frac{Hauteur}{sublimit\acute{e}} = \frac{sublimit\acute{e}}{\frac{amplitude}{2}}$$

Il énonce comme corollaire :

La moitié de la base, ou de l'amplitude, de la demi-parabole (c'est-à-dire le quart de l'amplitude de la parabole entière) est moyenne proportionnelle entre sa hauteur et la sublimité d'où un mobile, après descente en chute libre, décrit cette même parabole[24].

Ceci lui permet encore, Proposition VI, de déterminer l'amplitude en connaissant la sublimité et la hauteur.

Le cas particulier de 45°et la symétrie par rapport à 45°.

La proposition VII confirme théoriquement un résultat connu des artilleurs.

Parmi les projectiles qui décrivent des demi-paraboles de même amplitude, un impeto plus petit est requis pour celui dont la trajectoire a une amplitude double de la hauteur, que tout autre[25].

[23] *Discorsi*, p. 226.
[24] *Discorsi*, p. 227.
[25] *Discorsi*, p. 227.

Cette parabole intéressante est celle qui a en son point d'arrivée ou plutôt dans le cas des artilleurs son point de départ, une tangente de 45°. Elle est la seule à avoir l'amplitude double de la hauteur, parce que dans ce cas seulement, la hauteur est égale à la distance focale et l'amplitude à la distance entre la directrice et le foyer. Galilée montre sur la figure 13 que lorsque l'amplitude reste la même mais que la hauteur est plus petite, l'*impeto nm* est plus grand que celui de la parabole à angle de 45° *ea*, de même lorsque la hauteur devient plus grande sur la figure 14, l'*impeto nm* est plus grand que *ae*. L'évaluation de l'*impeto* composé se fait comme précédemment.

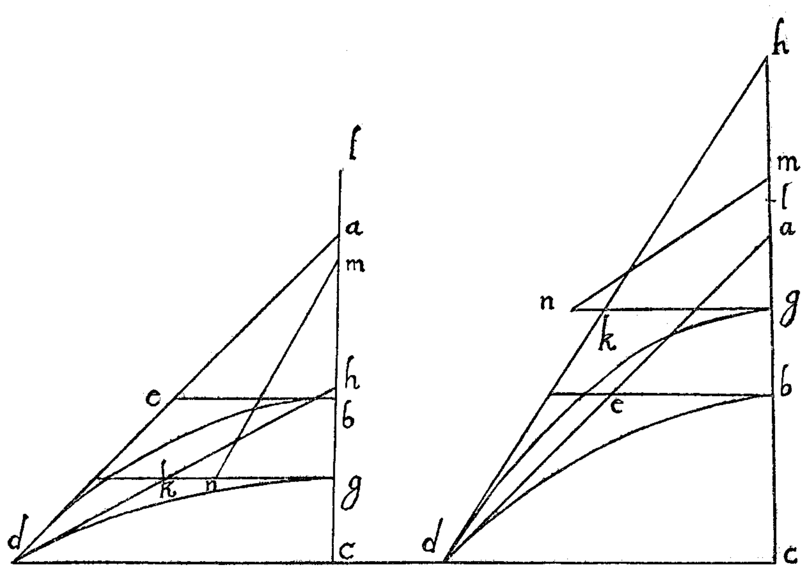

Figure 22: Cas d'angles supérieur et inférieur à 45°

Nous voyons clairement dans cette proposition que la hauteur n'est pas la distance focale mais qu'elle marque la distance à une parallèle quelconque à la directrice.

Galilée poursuit par un corollaire :

D'où il apparaît, par la converse, qu'un impeto plus petit est requis pour lancer un projectile, à partir du point d , le long de la demi-parabole db, que le long de toute autre [parabole] dont l'élévation serait plus grande ou plus petite que celle de la *demi-parabole bd, représentée par la tangente ad dont l'angle avec la ligne d'horizon est de 45 degrés*[26] .

Dans la Proposition VIII, Galilée poursuit son raisonnement en montrant une intéressante symétrie par rapport à la tangente à 45°.

Les amplitudes des paraboles décrites par des projectiles animés du même impeto, et tirés selon des élévations inférieures ou supérieures d'une même quantité à l'angle de 45°, sont égales entre elles[27].

La démonstration se fait en déterminant, dans les deux cas, l'*impeto* composé et en montrant géométriquement des égalités de triangles[28].

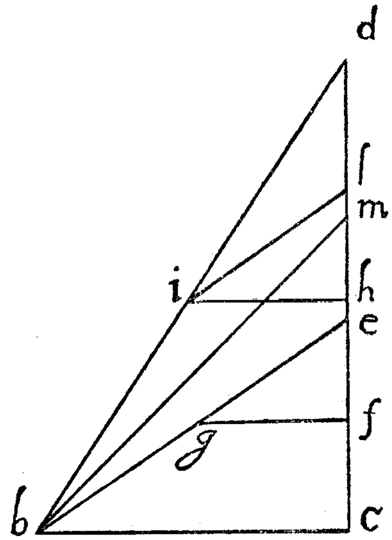

Figure 23: Symétrie des amplitudes par rapport à 45°

[26] *Discorsi*, p. 229.

[27] *Discorsi*, p. 229.

[28] La démonstration montre l'égalité de ih et de gf qui n'apparaît pas sur la figure.

Lien mathématique entre *amplitude, sublimité et hauteur.*

La Proposition IX montre que

Des paraboles, dont les hauteurs et les sublimités sont inversement proportionnelles, ont des amplitudes égales[29].

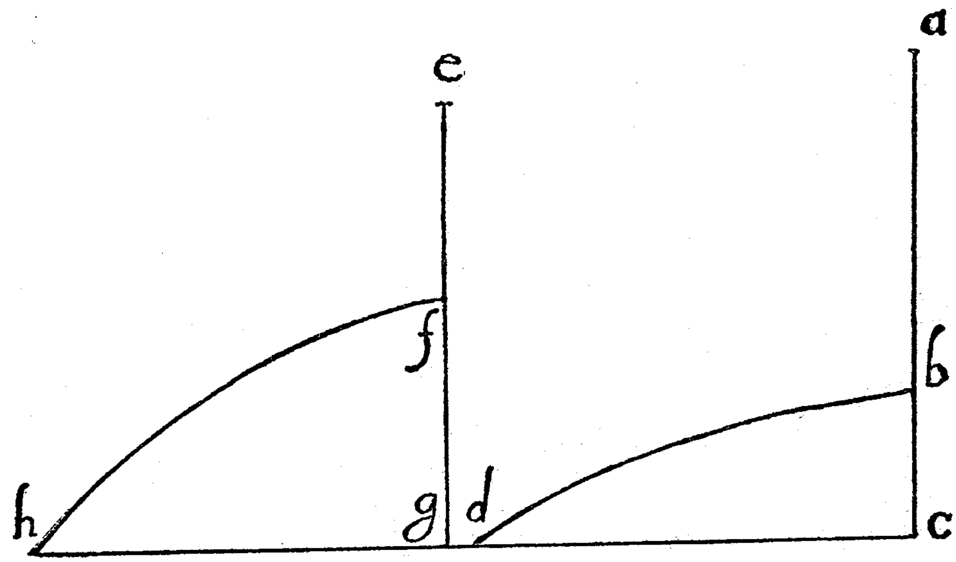

Figure 24: Seizième figure de Galilée

Autrement dit si l'on a

$$\frac{h_1}{S_1} = \frac{S_2}{h_2}$$

alors les amplitudes sont les même et il montre à la proposition X que l'*impeto* est aussi égal. La proposition IX ne fait que répéter la relation entre hauteur, sublimité et amplitude trouvée à la proposition V supra. La relecture de la relation est fait en tenant compte de la symétrie qui vient d'être démontrée et elle permet la proposition X. Cette dernière affirme que l'*impeto* en fin de parcours, d'un corps que l'on a laissé tombé sur une trajectoire parabolique d'une certaine hauteur qu'il

[29] *Discorsi*, p. 230.

appelle la sublimité puis qu'on le laisse descendre le long de sa parabole sur une certaine hauteur, sera égal à l'*impeto* d'un corps en chute libre, verticale descendant une hauteur totale, somme de la sublimité et de la hauteur. Un corollaire résume l'acquis.

De là suit qu'au point terminal de toutes les demi-paraboles, pour lesquelles la somme de la sublimité et de la hauteur est dientique, l'impeto est pareillement identique[30].

Ceci n'est qu'un corollaire du théorème d'énergie publié en 1624, par Grégoire de Saint-Vincent dans ses *Thèses de statique*[31].

THEOREME 13

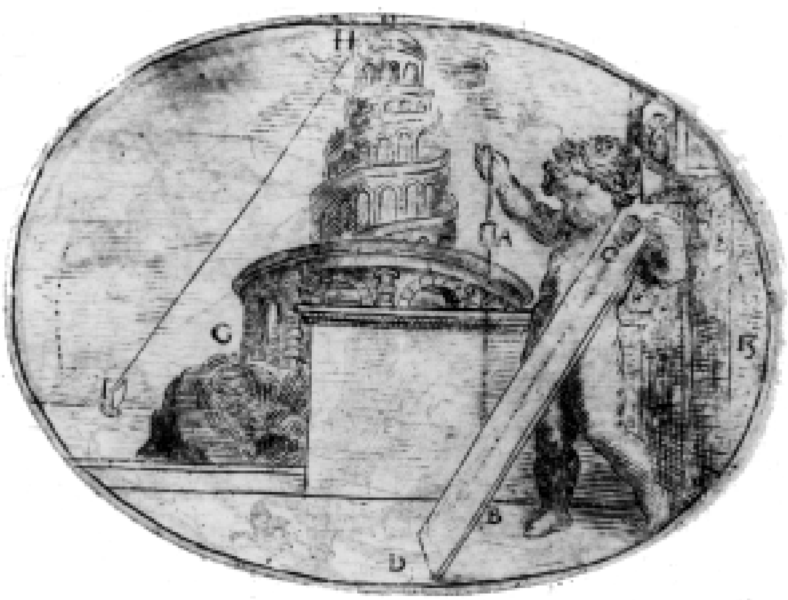

Figure 25: Grégoire de Saint-Vincent, Thèses de statique

a. Transportés sur une pente, tout droit ou en oblique, des poids de moments égaux , accumulent des forces égales en parcourant une égale mesure de la distance verticale, qu'ils s'en acquittent par une chute lente ou très prompte, qu'ils croisent

[30] *Discorsi*, p. 232.

[31] Theoremata mathematica scientiae staticae, Leuven, 1629

l'horizon en une course ou plus oblique ou plus droite, qu'ils soient proches du centre de l'Univers ou qu'ils en soient éloignés d'un vaste intervalle . Et la vertu de ces forces est tout à fait difforme et composée de parts hétérogènes, tel un mouvement dont la durée est faite de pièces et de morceaux .

b. Que si la masse descend un sentier en spirale s'enroulant autour d'un cylindre ou d'un cône , il faut calculer les forces à partir d'une mesure de la distance verticale, car tirer ceci de la longueur du chemin, n'est pas une bonne méthode.

a. La vertu que A acquiert en tombant vers B est égale à la vertu de ce même A tombant le long d'un plan incliné de C à D. b. La spirale de la tour GH et la ligne HI produisent la même vertu parce qu'elles ont la même distance verticale[32].

Galilée continue à analyser les possibilité de sa relation entre sublimité, hauteur et amplitude en demandant :

Etant donné l'impeto et l'amplitude d'une demi-parabole, trouver sa hauteur.

3 Analyse du lien entre *amplitude, sublimité et hauteur*.

Dans les trois dernières propositions, Galilée analyse la relation liant la sublimité, la hauteur et l'amplitude d'une nouvelle manière, en établissant des tables. Ainsi dans la proposition XII, il se donne l'*impeto* au point d'arrivée ou de départ si l'on veut poursuivre le raisonnement en termes d'artillerie, et établit un tableau donnant la tangente à la parabole en ce même point et l'amplitude de la parabole décrite.

Calculer et disposer sous forme de table les amplitudes de toutes les demi-paraboles que décrivent des projectils lancés avec un même impeto[33].

Dans la proposition XIII, il complète son tableau en ajoutant pour chaque amplitude trouvée, la hauteur de chaque demi-parabole.

[32] Cf. P. Radelet-de Grave, *Relativité galiléenne et lois de conservation,* "Revue des Questions scientifiques", Tome 170, 1999, N° 3, pp. 209-261

[33] *Discorsi*, p. 233.

Etant donné les amplitudes des demi-paraboles, réunies dans la table précédente, et tout en conservant le même impeto, déterminer la hauteur de chaque demi-parabole.

La proposition XIV résoud de manière tout à ffait générale le problème des artilleurs.

Déterminer, pour chaque degré d'élévation, la hauteur et la sublimité des demi-paraboles dont l'amplitude est constante.

Ce qui signifie étant donnée l'amplitude, la distance à la cible, déterminer pour chaque degré d'élévation, c'est à dire angle de la tangente au point d'arrivée, ou angle du canon au point de départ, la hauteur et la sublimité. Il détermine les autres grandeurs de la parabole dont la somme donne l'*impeto* c'est-à-dire la "vitesse" à laquelle il faut lancer l'obus.

Conclusion

Ce texte ne peut certainement pas être lu sans autres commentaires par des élèves mais il contient plusieurs idées qui peuvent faire l'objets de cours tant de géométrie sur la parabole que de mécanique sur le mouvement des projectiles. Il faut en tout cas les mettre en garde à propos de l'ambigïté du mot *impeto*, mais cette mise en garde à elle seule peut probablement faire l'objet d'un cours qui viserait à préciser toutes les notions compatibles avec l'*impeto* galiléen. De nombreux historiens s'y sont employés.