

PHYSIQUE THÉORIQUE ET MATHÉMATIQUE II
PHYS 2122

MARCHES ALÉATOIRES

PHILIPPE RUELLE

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

ANNÉE ACADÉMIQUE 2005–2006

Les marches aléatoires pourraient passer pour un thème pointu en théorie des probabilités, ou pour un chapitre spécifique de la théorie générale des processus stochastiques. Le physicien y trouvera cependant beaucoup plus, et y reconnaîtra bon nombre d'éléments familiers, ou appelés à l'être. C'est peut-être aussi l'une des premières occasions de s'exercer aux méthodes asymptotiques, tellement importantes aussi bien en physique qu'en mathématique.

C'est dans cet esprit que ce cours a été conçu, même si les aspects purement mathématiques des marches aléatoires sont loin d'être négligeables et inintéressants. Mais plutôt que de développer ces aspects-là, et d'aller chercher les estimations les plus fines sur leurs comportements, l'accent est davantage placé sur leurs aspects "physiciens". Ceux-ci sont nombreux, comme on s'en apercevra : on verra par exemple des rapprochements clairs entre le mouvement brownien, la mécanique quantique et la théorie des champs (libre). De même la relation entre les marches aléatoires discrètes et le mouvement brownien illustre magnifiquement la description des propriétés critiques d'une classe (d'universalité) de systèmes discrets par une théorie des champs. La question de savoir comment une perturbation des marches aléatoires (du mouvement brownien, du champ libre) peut altérer leur comportement asymptotique nous amènera à mettre en oeuvre des techniques précieuses dans d'autres circonstances, comme les limites d'échelle (du continu), la théorie des perturbations, l'analyse par le groupe de renormalisation, et nous permettra de saisir la signification des classes d'universalité.

Et en fait, tous les éléments essentiels —et d'une certaine façon, toutes les difficultés— d'une vraie théorie des champs sont présents, de sorte que l'on pourrait très bien considérer ce cours comme une introduction à la théorie des champs, illustrée sur une théorie de champs "miniature" que sont les marches aléatoires, discrètes ou browniennes. Leur avantage est bien sûr que l'on est face aux mêmes problèmes conceptuels et techniques, mais que le degré de complexité est ici bien moindre, ce qui permet de faire une analyse plus complète, et donc hautement instructive.

Contents

Marches aléatoires discrètes	1
Position du marcheur	3
Caractéristiques générales	9
Comportement diffusif	10
Temps de premier passage	12
La loi du logarithme itéré	19
Temps local: récurrence et transience	19
La première loi de l'arcsinus	21
Marches pondérées	24
Appendice: théorèmes taubériens	27
Exercices	28
Mouvement brownien	37
Limite du continu de la marche standard	37
Théorème central limite	41
Mesure de Wiener	42
Méthode des images	44
Générateur du mouvement brownien	46
Formule de Kac	49
Mouvement brownien dans un potentiel	51
Formule de Feynman	54
Etats liés en mécanique quantique	56
Exemple d'application de la formule de Kac	57
Les processus de Bessel	60
Exercices	61
Marches aléatoires perturbées	67
Première analyse: formulation discrète	68
Formulation continue	73
Calculs explicites en une dimension	75
Analyse en échelles: renormalisation	79

Comportements asymptotiques	84
Basses dimensions $d < 2$	86
Hautes dimensions $d \geq 2$	91
Exercices	93

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

Les références relatives aux marches aléatoires et plus généralement aux processus stochastiques sont innombrables. Parmi les références classiques, citons:

1. F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer 1976.
La bible des marches aléatoires discrètes.
2. B.D. Hughes, *Random Walks and Random Environments – Volume 1: Random Walks*, Clarendon Press 1995.
Tout aussi biblique, mais plus moderne.
3. K. Itô et H.P. McKean, *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer 1974.
La bible pour les marches continues, mais pas vraiment de lecture facile ...
4. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 1 (et 2), Wiley 1957.
Beaucoup moins complet mais plus abordable.
5. M. Kac, *Probability and related topics in physical sciences*, Interscience Publishers 1959.
Une réflexion sur le calcul des probabilités, plus une discussion de la formule qui porte son nom et la relation avec la formulation de Feynman de la mécanique quantique.
6. C. Itzykson et J.-M. Drouffe, *Théorie statistique des champs*, volume 1, InterEditions 1989.
Un traitement physicien (et inspirant ...) des marches aléatoires et de leur rôle en théorie des champs.
7. B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press 1979.
Un traitement largement physicien mais avec beaucoup de rigueur mathématique.
8. L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integral*, Wiley 1981.
Surtout utile pour la formulation en intégrale de chemins de la mécanique quantique.

Des références plus spécialisées (et plus récentes !) sont:

9. E. Guitter, *Méthodes de théorie des champs pour les polymères et les membranes polymérisées*, cours donné à l'école de Beg Rohu 1997.
Le traitement des perturbations des marches browniennes présenté dans ce cours en est largement inspiré.
10. E. Raspo, S. de Oliveira, A. Nemirovsky et M. Coutinho-Filho, *Random walks: A pedestrian approach to polymers, critical phenomena, and field theory*, Am. J. Phys. 59 (1991) 633.
Un article exactement dans l'esprit de ce cours ...

11. Deux articles sur la distribution du maximum (de la norme) d'une marche aléatoire discrète:
V. Seshadri et K. Lindenberg, *Extrema Statistics of Wiener-Einstein Processes in One, Two and Three Dimensions*, J. stat. Phys. 22 (1980) 69.
R. Bidaux, J. Chave et R. Vocka, *Finite time and asymptotic behaviour of the maximal excursion of a random walk*, J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999) 5009.
12. Une autre vision des perturbations des marches:
A. Ordemann, E. Tomer, G. Berkolaiko, S. Havlin et A. Bunde, *Structural Properties of Self-Attracting Walks*, cond-mat/0102409, et ses propres références.
13. (Petite) preuve que le domaine des marches reste très actif:
G.M. Cicuta et M. Contedini, *Returns to origin of a one-dimensional random walk visiting each site an even number of times*, math.PR/9903063.
G.M. Cicuta, M. Contedini et L. Molinari, *Enumeration of simple random walks and tridiagonal matrices*, J. Phys. A35 (2002) 1125–1146; cond-mat/0011360.
M. Bauer, D. Bernard et J.M. Luck, *Even-visiting random walks: exact and asymptotic results in one dimension*, cond-mat/0102512.
M. Katori et H. Tanemura, *Scaling limit of vicious walkers, Schur function, and Gaussian random matrix ensemble*, cond-mat/0110274.
Z. Shi et B. Tóth, *Favourite sites of simple random walk*, math.PR/0006173.
C. Godrèche et J.M. Luck, *Statistics of the occupation time for a random walk in the presence of a moving boundary*, cond-mat/0106567.
D. ben-Avraham, B. Johnson, C. Monaco, P. Krapivsky et S. Redner, *Ordering of random walks: the leader and the laggard*, cond-mat/0210501.
P. Krapivsky et S. Redner, *Random walk with shrinking steps*, physics/0304036.
G. Oshanin et R. Voitouriez, *Random walk generated by random permutations of $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}$* , cond-mat/0312262.
L. Turban, *Iterated random walk*, cond-mat/0312358.

Impossible de ne pas mentionner, même si on arrive là à un niveau qui dépasse très largement celui de ce cours, les avancées remarquables de ces dernières années, utilisant des techniques avancées issues de la physique des phénomènes critiques (invariance conforme) pour résoudre des problèmes purement mathématiques (et difficiles) de mouvement brownien, de percolation et d'arbres couvrants, entre autres:

14. O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, math.PR/9904022.
W. Werner, *Critical exponents, conformal invariance and planar Brownian motion*, math.PR/0007042.
G.F. Lawler, O. Schramm et W. Werner, *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, math.PR/0112234.
W. Kager et B. Nienhuis, *A guide to stochastic Loewner evolution and its applications*, math-ph/0312056.

MARCHES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Une marche aléatoire est un processus extrêmement simple à définir. Afin de rester concret et parce que c'est autour d'elles que ce cours s'articulera, nous commencerons par présenter les marches dites symétriques (ou standards, ou simples) sur un réseau cubique \mathbb{Z}^d , d -dimensionnel. Ce premier chapitre leur est quasi-exclusivement consacré, alors que le deuxième chapitre est centré sur leur version continue (mouvement brownien). Finalement, dans le troisième chapitre, nous nous poserons la question de la stabilité des comportements des marches aléatoires: une perturbation d'une marche, même très légère, est-elle capable d'en altérer complètement le comportement, et si oui, de quelle façon? Là encore, nous répondrons à cette question en étudiant des perturbations de marches symétriques.

Une marche aléatoire symétrique sur le réseau \mathbb{Z}^d démarre à l'instant initial d'un site quelconque du réseau, disons l'origine. Ensuite le marcheur effectue, au hasard, un saut vers l'un des sites les plus proches de l'origine. Les $2d$ sauts possibles sont tous équiprobables, et s'effectuent avec probabilité $\frac{1}{2d}$. Au temps 1, le marcheur se trouve donc en $\pm\vec{e}_i$ (avec \vec{e}_i le vecteur unitaire le long de l'axe i). De cette nouvelle position, il effectue un saut aléatoire du même type que le premier, et occupera à l'instant 2 l'un des sites $\pm\vec{e}_i \pm \vec{e}_j$ (il y a donc $2d^2 + 1$ positions possibles, qui ne sont plus équiprobables, bien que les sauts l'étaient). Il continue de la sorte aux instants ultérieurs: chaque seconde, le marcheur se déplace d'une distance 1 le long d'un des axes, les $2d$ directions possibles étant équiprobables. Si le marcheur se trouve en \vec{x} au temps N , il se trouvera ainsi au temps $N + 1$ en un des $2d$ sites donnés par $\vec{x} \pm \vec{e}_i$. La probabilité de passer de \vec{x} à l'un de ces points vaut $\frac{1}{2d}$. La définition ci-dessus de la marche implique une propriété importante: les possibilités de saut, ainsi que les probabilités correspondantes, ne changent pas au cours de la marche. *Autrement dit, les pas successifs sont identiques, et chaque pas s'effectue indépendamment des pas précédents.*

La marche aléatoire que l'on vient de définir est appelée symétrique en raison du caractère isotrope des probabilités de pas. Une version asymétrique consiste à décider que les sauts dans les directions positives des axes se font avec probabilité p , et ceux dans une direction négative avec probabilité q (l'étude de cette marche asymétrique est proposée dans les exercices) ou même de favoriser le côté positif de certains axes et le côté négatif d'autres axes en introduisant une paire de paramètres p_i, q_i pour chaque axe.

L'idée essentielle de la marche aléatoire que l'on vient de définir, à savoir une succession de pas élémentaires qui se répètent, permet d'envisager une foule de généralisations. On peut ainsi remplacer le réseau par un ensemble E , fini ou infini, sur lequel la marche s'effectue. On a également besoin d'une suite de mesures de probabilité $p_t(\{x_0, x_1, \dots, x_{t-1}\} \rightarrow x_t)$, $x_0, x_1, \dots, x_t \in E$ et $t = 1, 2, 3, \dots$, qui vont spécifier les pas possibles et leurs probabilités, ces dernières pouvant dépendre de l'instant auquel le pas s'effectue. La marche sera alors définie

comme une succession de sauts: le marcheur démarre d'un point x_0 et aux instants ultérieurs, il effectue un saut de x_{t-1} à x_t , et cela avec une probabilité $p_t(\{x_0, x_1, \dots, x_{t-1}\} \rightarrow x_t)$, qui dépend potentiellement de toutes les positions antérieures. Parfois cette dépendance est cachée dans les contraintes auxquelles on soumet la marche. C'est le cas notamment de la marche aléatoire symétrique auto-évitante: sa définition est celle de la marche symétrique donnée plus haut, sauf que l'on contraint le marcheur à ne jamais revenir en un point qu'il a déjà visité, ce qui introduit effectivement une dépendance dans toute l'histoire de la marche. Une autre voie de généralisation pourrait consister à supposer que les sauts (toujours aléatoires) se font à des moments qui sont eux aussi aléatoires ...

Les marches aléatoires parmi les plus intéressantes sont néanmoins celles qui sont *homogènes et invariantes par translation*. Le terme homogène signifie que les mesures de probabilité p_t sont indépendantes du temps t , ou encore que les sauts effectués à chaque instant sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.), ce qui implique en particulier que p_t dépend seulement de x_{t-1} et x_t . L'homogénéité est donc une forme d'invariance dans le temps. L'invariance par translation quant à elle implique que ces mêmes mesures $p_t(x \rightarrow y)$ ne dépendent que de $x - y$.

A l'exception de quelques marches aléatoires proposées en exercice, toutes les marches considérées dans ce cours seront homogènes et invariantes par translation.

Revenons maintenant à la marche symétrique sur le réseau \mathbb{Z}^d . Parmi tous les chemins possibles que le marcheur peut emprunter, on notera un chemin particulier par ω , et on désignera par $\omega(t) \in \mathbb{Z}^d$ (ou aussi $x(t)$) la position du marcheur au temps t . Par convention $\omega(0) = \vec{0}$, et la variable temporelle t prend des valeurs entières de \mathbb{N} .

Souvent aussi, on considérera des marches de longueur (ou de durée) N , c'est-à-dire que l'on laisse la marche se dérouler jusqu'au temps $t = N$. Clairement le nombre de chemins de longueur N vaut $(2d)^N$, puisqu'à chaque seconde, le marcheur a le choix entre $2d$ sauts possibles.

Ceci mène à la notion intuitive de probabilité sur l'ensemble des chemins comme proportion des chemins qui satisfont au critère demandé (par exemple de s'auto-intersecter ou de rester du côté $x_1 > 0$). Le calcul de probabilités se ramène alors à un problème purement combinatoire, d'énumération.

Par exemple, on pourra calculer la probabilité que le marcheur revienne à son point de départ au temps N comme

$$\text{Prob}[\omega(N) = \vec{0}] = \frac{1}{(2d)^N} |\{\omega : \omega(N) = \vec{0}\}|. \quad (1.1)$$

Le plus souvent on s'intéressera aux comportements asymptotiques des probabilités, c'est-à-dire aux propriétés statistiques de la marche lorsqu'on la laisse se dérouler pendant un temps très long, $N \rightarrow \infty$.

Ceci étant, notre but sera justement d'étudier les propriétés statistiques des marches aléatoires (celles définies plus haut, ou des généralisations dont on parlera plus loin). Les questions typiques que l'on souhaiterait résoudre sont:

- ▶ quelle est la probabilité que le marcheur revienne à son point de départ ?
- ▶ combien de sites distincts visite-t-il en un temps N ?
- ▶ à quelle distance de son point de départ le marcheur s'éloigne-t-il en moyenne, après un temps N ?
- ▶ est-ce qu'un chemin typique d'une marche s'intersecte elle-même ? Et si oui, avec quelle fréquence ?
- ▶ que vaut la distribution de probabilité de la distance d'éloignement maximum du point de départ, i.e. $\text{Prob}[\max_{t \leq N} |\omega(t)| = r]$ comme fonction de r et de N ?
- ▶ quel est le temps moyen passé par le marcheur en un point donné \vec{x} ?
- ▶ quelle peut être l'influence d'une perturbation sur toutes ces quantités ?

Avant de commencer des estimations concrètes, signalons, pour ceux qui aiment visualiser les choses, que des sites internet proposent des petits programmes java de simulations de marches aléatoires, notamment www.math.uah.edu/stat/walk et math.furman.edu/~dcs/java/rw.html. Il y en a sûrement beaucoup d'autres ...

1.1 POSITION DU MARCHEUR

La probabilité la plus élémentaire que l'on puisse considérer est sans doute celle qui concerne la position du marcheur après un temps N , autrement dit

$$P_0(\vec{x}; N) = \text{probabilité que partant de l'origine, le marcheur soit arrivé au point } \vec{x} \text{ au temps } N ?$$

Déterminant en principe toutes les autres probabilités (comme celles de la liste établie plus haut), elle peut paraître plus fondamentale. Mais en raison de la difficulté technique posée par son utilisation, on n'y a pas nécessairement recours. En fait dans bien des cas, on utilisera d'autres techniques pour parvenir à nos fins. Pour ce qui suit, elle reste néanmoins une quantité importante (nous le verrons plus spécialement au chapitre 2), qui nous permettra en tout cas de développer une première intuition.

Comme souvent dans ce genre de problème, il existe de nombreuses manières de calculer la quantité recherchée. Chaque méthode a son utilité, et il n'est pas superflu d'en connaître plusieurs. Nous en donnerons quatre pour la distribution de la position du marcheur: la première méthode sera combinatoire, la seconde sera plutôt différentielle dans son principe, la troisième sera basée sur une utilisation directe de la transformée de Fourier, alors que la quatrième est empruntée à la théorie des graphes.

Autre avantage de la multitude de méthodes, nous obtiendrons ainsi trois expressions différentes (mais bien sûr équivalentes).

Méthode combinatoire

Comme on l'a dit plus haut, le calcul de $P_0(\vec{x}; N)$ requiert d'énumérer les chemins qui partent de $\vec{0}$ et qui arrivent en \vec{x} en N étapes.

Supposons que le marcheur effectue un total de $g_i + d_i$ sauts dans la direction i , avec g_i sauts vers la gauche (direction négative de la i ème composante) et d_i sauts vers la droite. Puisqu'il doit arriver dans la direction i au point x_i , on doit avoir $x_i = d_i - g_i$. Bien sûr, on doit avoir aussi $N = \sum_i g_i + d_i$.

Les moments auxquels ces sauts vers la gauche ou la droite se produisent n'ont aucune importance, puisque seuls comptent les point et temps d'arrivée. Par conséquent le nombre de chemins qui vont de $\vec{0}$ à \vec{x} vaut le nombre de façons de grouper N pas en paquets de g_1 pas vers la gauche le long de \vec{e}_1 , d_1 pas vers la droite le long de \vec{e}_1 , g_2 pas vers la gauche le long de \vec{e}_2 , ... Ce nombre est égal au coefficient multinomial

$$\frac{N!}{g_1! d_1! g_2! d_2! \dots g_d! d_d!}. \quad (1.2)$$

On en déduit immédiatement que la probabilité recherchée vaut

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{(2d)^N} \sum_{d_i \geq 0 : \sum_i (2d_i - x_i) = N} \frac{N!}{\prod_i d_i! (d_i - x_i)!}. \quad (1.3)$$

On remarquera que la condition sur la somme, $\sum_i (2d_i - x_i) = N$, implique que la probabilité $P_0(\vec{x}; N)$ n'est non-nulle que si la parité de N est égale à celle de $\sum_i x_i$, ce qui est intuitivement clair.

En une dimension ($d = 1$), la formule se simplifie quelque peu pour donner

$$P_0(x; N) = \begin{cases} \frac{1}{2^N} \frac{N!}{(\frac{N+x}{2})! (\frac{N-x}{2})!} = \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{N+x}{2}} & \text{si } x = N \bmod 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Pour N fixé, le graphe de cette probabilité comme fonction de x est une cloche centrée en 0. La probabilité sera donc maximale de rester aux alentours du point de départ.

Méthode "différentielle"

Cette méthode peut être qualifiée de différentielle car elle établit une relation locale entre des probabilités, que l'on intègre ensuite.

Pour être en \vec{x} au temps N , le marcheur doit nécessairement être, l'instant antérieur, en l'un des sites qui sont voisins de \vec{x} . Par conséquent la probabilité d'être en \vec{x} au temps N est égale à celle d'être au temps $N - 1$ en un des $(2d)$ points $\vec{x} \pm \vec{e}_i$, multipliée par la probabilité d'effectuer le saut vers \vec{x} au dernier moment:

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N - 1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N - 1) \right]. \quad (1.5)$$

On peut réécrire cette équation sous une forme plus suggestive

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \Delta P_0(\vec{x}; N-1), \quad (1.6)$$

où l'on a défini les opérateurs “différentiels” (en fait aux différences finies)

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = P_0(\vec{x}; N) - P_0(\vec{x}; N-1), \quad (1.7)$$

$$\Delta P_0(\vec{x}; N-1) = \sum_i \left[P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) - 2P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1) \right]. \quad (1.8)$$

Ces deux opérateurs sont des versions discrètes de la dérivée temporelle et du laplacien respectivement, ce qui fait apparaître l'équation satisfaite par $P_0(\vec{x}; N)$ comme une version discrète de l'équation de la chaleur (de diffusion).

Pour la résoudre, posons par transformation de Fourier

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^{d/2}} e^{i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}} c_N(\varphi), \quad \left(\text{avec } c_N(\varphi) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} \frac{e^{-i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}}}{(2\pi)^{d/2}} P_0(\vec{x}; N) \right) \quad (1.9)$$

En insérant dans l'équation ci-dessus, on trouve que les coefficients $c_N(\varphi)$ satisfont

$$c_N(\varphi) = c_{N-1}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right) = c_0(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right)^N. \quad (1.10)$$

La condition initiale $P_0(\vec{x}; 0) = \delta_{\vec{x}, \vec{0}}$ implique $c_0(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ et détermine $c_N(\varphi)$ complètement.

Au total, on trouve l'expression suivante

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right)^N. \quad (1.11)$$

On peut noter que ces probabilités sont correctement normalisées, $\sum_{\vec{x}} P_0(\vec{x}; N) = 1$.

Bien que restant sous forme intégrale, cette expression est souvent plus commode que la précédente.

Les arguments qui précèdent restent parfaitement valides pour un point de départ arbitraire, de sorte que l'on a

$$P_{\vec{y}}(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[P_{\vec{y}}(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) + P_{\vec{y}}(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1) \right]. \quad (1.12)$$

Notons aussi que plutôt que de se demander d'où le marcheur venait lorsqu'il est arrivé en \vec{x} , on peut également se demander où il est allé lorsqu'il a quitté \vec{y} . Le même genre de

raisonnement que ci-dessus permet ainsi d'écrire une équation différentielle analogue à (1.12) mais dans laquelle c'est le point de départ qui varie, et non le point de d'arrivée

$$P_{\vec{y}}(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[P_{\vec{y}+\vec{e}_i}(\vec{x}; N-1) + P_{\vec{y}-\vec{e}_i}(\vec{x}; N-1) \right]. \quad (1.13)$$

Méthode de TF directe

Cette troisième méthode repose sur autre vision de la marche aléatoire, comme la somme des pas effectués chaque seconde. En effet, si \vec{s}_k désigne la variable aléatoire représentant le saut effectué au moment k , on pourra écrire que

$$\vec{\omega}(N) = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \dots + \vec{s}_N. \quad (1.14)$$

Chaque variable \vec{s}_k prend les $(2d)$ valeurs $\pm\vec{e}_i$, chacune avec probabilité $\frac{1}{2d}$. Le point le plus important de cette décomposition est que les variables \vec{s}_k sont *indépendantes* (et identiquement distribuées).

Considérons maintenant la fonction génératrice des moments

$$\langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\omega}(N)} \rangle = \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{x}} P_0(\vec{x}; N), \quad (1.15)$$

qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la distribution $P_0(\vec{x}; N)$, c'est-à-dire la fonction $c_N(\varphi)$ du paragraphe précédent (à une puissance de 2π près).

On trouve

$$\begin{aligned} \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\omega}(N)} \rangle &= \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \dots + \vec{s}_N)} \rangle = \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{s}_1} \rangle \dots \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{s}_N} \rangle \quad \text{par indépendance des } s_k \\ &= \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{s}_1} \rangle^N \quad \text{puisqu'elles sont identiquement distribuées} \\ &= \left[\sum_{i=1}^d \left(e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{e}_i} \frac{1}{2d} + e^{-i\vec{\varphi} \cdot \vec{e}_i} \frac{1}{2d} \right) \right]^N = \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right)^N. \end{aligned} \quad (1.16)$$

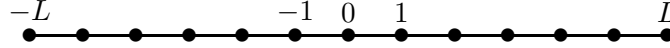
La formule d'inversion de Fourier conduit alors à l'expression donnée plus haut en (1.11).

Méthode des graphes

Cette quatrième méthode s'avère non seulement utile pour le calcul de $P_0(\vec{x}; N)$ et d'autres probabilités comme nous le verrons plus loin, mais elle ouvre la voie également à toutes sortes de généralisations de marches aléatoires sur d'autres espaces que des réseaux infinis (voir par exemple les exercices).

Par facilité, nous expliciterons la méthode dans le cas unidimensionnel. Le cas multidimensionnel n'en sera qu'une adaptation immédiate.

Au lieu de considérer le réseau infini \mathbb{Z} , imaginons que l'on en utilise seulement une portion finie, comprenant tous les sites entre $-L$ et $+L$:



Ce réseau tronqué, que l'on verra comme un graphe, est donc symétrique autour de l'origine et comporte $2L + 1$ sites.

Le calcul de $P_0(x; N)$ nécessitait d'énumérer les chemins allant de l'origine au point x en N pas. Une manière astucieuse de procéder à ce décompte est la suivante.

Un graphe peut être caractérisé par sa matrice d'adjacence G , qui code sa connectivité: on posera $G_{b,a} = 1$ si il existe une connexion du site a au site b , $G_{b,a} = 0$ sinon. (Si certains des liens sont orientés, la matrice d'adjacence est non-symétrique.) Dans le cas du graphe ci-dessus, la matrice d'adjacence est nulle partout sauf sur les deux diagonales juste en-dessous et au-dessus de la diagonale principale, où elle vaut 1.

Selon sa définition de matrice d'adjacence, $G_{b,a}$ donne en fait le nombre de chemins allant de a à b (et inversement puisque G est symétrique ici) en une seule étape. On peut se convaincre, et c'est l'observation cruciale, que le nombre de chemins qui vont de a à b en N étapes est donné par

$$\#\{\omega : \omega(0) = a, \omega(N) = b\} = (G^N)_{b,a} = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}} G_{b, a_{N-1}} \dots G_{a_2, a_1} G_{a_1, a}. \quad (1.17)$$

On s'en convainc facilement en réalisant que les a_i représentent les positions aux temps intermédiaires. Ces positions intermédiaires ne sont accessibles au marcheur précisément que si il existe sur le graphe un chemin de coordonnées $(a, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, b)$. Ceci est automatiquement pris en compte par le produit des éléments de matrice de G , qui vaut 1 si le chemin en question existe, et vaut 0 dans le cas contraire.

Ayant trouvé le nombre de chemins du type requis, on en déduit la probabilité qui nous intéresse

$$P_0(x; N) = \frac{1}{2^N} (G^N)_{x,0} = \left[\left(\frac{1}{2} G \right)^N \right]_{x,0}. \quad (1.18)$$

La dernière écriture est triviale mais significative: la matrice $T \equiv \frac{1}{2}G$ contient non seulement l'information sur la connectivité du graphe (les sauts possibles) mais aussi les probabilités avec lesquelles le marcheur emprunte les connexions du graphe (les probabilités des sauts). On appellera T la matrice des probabilités de transition, ou plus simplement la matrice de transition: le coefficient $T_{x,y}$ donne la probabilité de transition de y vers x . On a donc

$$P_0(x; N) = (T^N)_{x,0}. \quad (1.19)$$

La matrice de transition caractérise entièrement la marche (le processus aléatoire), puisqu'elle spécifie l'espace dans lequel elle s'effectue (le graphe), les sauts possibles (les connexions du graphe) et les probabilités des sauts. On peut se convaincre de son importance en

observant qu'elle décrit l'évolution dans le temps de la distribution de position. Effectivement, le même raisonnement qui avait mené à l'équation de récurrence (1.12) donne, dans le cas d'une matrice de transition quelconque T ,

$$P(x; N) = \sum_y T_{x,y} P(y; N - 1), \quad (1.20)$$

ce que l'on peut écrire vectoriellement comme $P(N) = TP(N - 1)$. En l'itérant, on en tire immédiatement $P(N) = T^N P(0)$, et donc la distribution au temps N en termes de la distribution initiale. L'équation (1.19) ci-dessus en est un cas particulier: que le marcheur démarre en 0 signifie $P(x; 0) = \delta_{x,0}$, et donc $P(x; N) = \sum_y (T^N)_{x,y} \delta_{y,0} = (T^N)_{x,0}$.

La matrice de transition spécifie univoquement un processus (et inversement), et permet de décrire aisément son évolution temporelle. Pour cette raison, on l'appelle aussi le *générateur du processus*. Nous reviendrons au chapitre 2 sur cette notion importante. A ce stade, mentionnons simplement qu'une matrice de transition doit posséder deux propriétés: ses coefficients doivent être des réels de $[0, 1]$ (ce sont des probabilités), et la somme des coefficients de n'importe quelle colonne doit valoir 1 (la somme $\sum_x T_{x,y}$ donne la probabilité de sauter de y vers un site, quel qu'il soit).

Dans le cas qui nous occupe, l'évaluation des éléments de matrice d'une puissance quelconque de G peut s'effectuer facilement par diagonalisation (étant symétrique, G est diagonalisable par une matrice orthogonale, constituée de ses vecteurs propres). Si l'on dénote par λ_k les valeurs propres de G , et par v_k les vecteurs propres correspondants, supposés orthonormalisés, la décomposition spectrale (la diagonalisation !) de G s'écrit

$$G_{b,a} = \sum_k \lambda_k v_k^*(a) v_k(b), \quad (1.21)$$

et on conclut ensuite que

$$(G^N)_{b,a} = \sum_k \lambda_k^N v_k^*(a) v_k(b), \quad (1.22)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, on vérifiera que le spectre de G vaut

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi k}{2(L+1)}, \quad v_k(a) = \frac{1}{\sqrt{L+1}} \sin \frac{\pi k(L+1+a)}{2(L+1)}, \quad (1.23)$$

avec $1 \leq k \leq 2L+1$, et la coordonnée a va de $-L$ à $+L$.

Après une toute petite manipulation trigonométrique, on trouve donc l'expression

$$P_0(x; N) = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{2L+1} \left(\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N \cos \frac{\pi kx}{2(L+1)}. \quad (L \geq N) \quad (1.24)$$

En fait, cette formule n'est correcte —ne reproduit les probabilités sur le réseau infini \mathbb{Z} — que pour autant que les bords en $\pm L$ n'aient pas d'effet. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le marcheur atteint un bord, il sera réfléchi vers l'intérieur du graphe, ce qui ne correspond pas à la marche que nous avons définie au début (cette marche aléatoire avec réflexion aux deux bords est étudiée dans les exercices). Pour être sûr que le marcheur n'ait pas le temps d'atteindre un bord, on supposera simplement que L soit suffisamment grand, et en tout cas que $L \geq N$. Dans ce cas, la restriction de \mathbb{Z} à une portion finie n'a aucun effet sur le résultat.

A fortiori, l'expression (1.24) sera toujours valide si on prend $L \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
P_0(x; t) &= \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^L \left(\cos \frac{\pi(2m+1)}{2(L+1)} \right)^N \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2(L+1)} \\
&\sim \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^L \left(\cos \frac{\pi m}{L+1} \right)^N \cos \frac{\pi m x}{L+1} \\
&\sim \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\pi} (\cos \varphi)^N \cos \varphi x,
\end{aligned} \tag{1.25}$$

et on retrouve l'expression précédente (1.11).

Le cas d -dimensionnel ne pose pas de problème. On utilise le graphe $[-L, L]^d$ correspondant au réseau tronqué, avec la matrice d'adjacence $G_{b,a} = \delta_{\langle a,b \rangle} = 1$ ou 0 selon que a et b sont plus proches voisins ou non. A nouveau on trouve le spectre de G , par transformée de Fourier par exemple,

$$\lambda_{\vec{k}} = 2 \cos \frac{\pi k_1}{2(L+1)} + \dots + 2 \cos \frac{\pi k_d}{2(L+1)}, \quad 1 \leq k_i \leq 2L+1, \tag{1.26}$$

$$v_{\vec{k}}(\vec{a}) = \frac{1}{(L+1)^{d/2}} \prod_{i=1}^d 2 \sin \frac{\pi k_i (L+1+a_i)}{2(L+1)}, \quad -L \leq a_i \leq L. \tag{1.27}$$

Ceci conduit à la formule suivante, à nouveau valide si $L \geq N$,

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{(L+1)^d} \sum_{\substack{k_i=1 \\ k_i \text{ impair}}}^{2L+1} \left(\frac{1}{d} \sum_i \cos \frac{\pi k_i}{2(L+1)} \right)^N \prod_i \cos \frac{\pi k_i x_i}{2(L+1)}. \tag{1.28}$$

Dans la limite $L \rightarrow \infty$, elle donne la formule de Fourier (1.11) dérivée plus haut.

1.2 QUELQUES CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES

Avant de passer à l'étude de quelques propriétés plus fines des marches aléatoires, on notera les trois propriétés suivantes de la distribution de position que l'on vient de calculer. Elles sont élémentaires, mais il est bon de les garder à l'esprit.

P1 Le choix de l'origine comme point de départ n'a évidemment rien de particulier:

$$P_0(\vec{x}; t) = P_{\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y}; t) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.29)$$

C'est la propriété d'invariance sous translation de la marche (et du réseau).

P2 Les parties disjointes d'une marche sont indépendantes, en raison de l'indépendance des sauts successifs effectués par le marcheur. Ceci se traduit par la propriété suivante

$$P_0(\vec{x}; t | \text{histoire de la marche jusqu'au temps } s) = P_{\omega(s)}(\vec{x}; t - s), \quad \forall s \leq t. \quad (1.30)$$

C'est une des propriétés les plus fortes des marches aléatoires. Si l'on connaît à un moment donné la position du marcheur, ce qui s'est passé avant ce moment n'a strictement aucun effet sur ce qui lui arrivera après ce moment. Techniquement, on dit que la marche aléatoire possède la propriété de Markov.

P3 Les distributions satisfont (comme n'importe quelle mesure de probabilité)

$$P_0(\vec{x}; t) = \sum_{\vec{y}} P_0(\vec{x}; t | \vec{y}; s) P_0(\vec{y}; s) \quad \forall s \leq t. \quad (1.31)$$

La propriété de Markov P2 implique que la probabilité conditionnelle est une simple probabilité pour une marche démarrant de \vec{y} au temps s . L'équation ci-dessus se réécrit

$$P_0(\vec{x}; t) = \sum_{\vec{y}} P_0(\vec{y}; s) P_{\vec{y}}(\vec{x}; t - s) \quad \forall s \leq t, \quad (1.32)$$

qui porte le nom d'équation de Chapman–Kolmogorov.¹

Le reste du chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés parfois surprenantes ou carrément contre-intuitives des marches aléatoires. Le but avoué est simplement de se familiariser avec leurs comportements et de révéler quelques-unes de leurs particularités les plus marquantes. D'autres calculs sont proposés en exercice.

1.3 COMPORTEMENT DIFFUSIF: ÉLOIGNEMENT MOYEN

On a calculé plus haut la distribution de probabilité concernant la position du marcheur, en fonction du temps. On a vu que la distribution est concentrée autour de l'origine, indiquant que le marcheur n'a pas tendance à s'écarter beaucoup de son point de départ. Peut-on quantifier cela ? Est-ce qu'il restera effectivement autour de son point de départ, ne s'aventurant jamais très loin, ou au contraire fait-il des excursions de plus en plus grandes ?

¹L'équation de Chapman–Kolmogorov est une conséquence de la propriété de Markov. Elle ne lui est cependant pas équivalente: certains processus satisfont l'équation de Chapman–Kolmogorov, sans avoir la propriété de Markov.

Un premier élément de réponse —on apportera un complément de réponse plus loin— est fourni par le calcul de $\langle |\omega(N)|^2 \rangle$, c'est-à-dire (le carré de) l'écart-type de la distribution de position. Il nous renseignera sur l'éloignement moyen du marcheur après un temps N .

La valeur de l'écart-type sera le résultat de la compétition de deux facteurs. D'une part, on l'a vu, il y a une probabilité plus grande de rester autour de l'origine, mais ces chemins-là ne contribuent que très peu à la valeur moyenne de $|\omega(N)|^2$. A l'inverse, il y a des chemins qui s'aventurent plus loin, et qui de ce fait apportent une contribution plus importante à la moyenne, mais il sont moins nombreux. Comme d'habitude, c'est donc une question de compétition entre un facteur combinatoire ou entropique (le nombre de chemins) et un facteur énergétique (la contribution qu'ils apportent).

Le calcul lui-même est simple. Le plus facile est à nouveau de recourir à la décomposition du chemin en pas élémentaires indépendants:

$$\langle \vec{\omega}(N) \cdot \vec{\omega}(N) \rangle = \sum_{i,j=1}^N \langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle = \sum_{i=1}^N \langle |s_i|^2 \rangle = N \langle |s_1|^2 \rangle = N. \quad (1.33)$$

Le même calcul (et celui des moments d'ordres plus élevés) peut s'effectuer à l'aide de la fonction génératrice des moments, que l'on a calculée à la section 1. On trouve ainsi

$$\langle \vec{\omega}(N) \cdot \vec{\omega}(N) \rangle = \sum_{i=1}^d -\partial_{\varphi_i}^2 \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\omega}(N)} \rangle \Big|_{\vec{\varphi}=0} = \sum_{i=1}^d -\partial_{\varphi_i}^2 \left(\frac{1}{d} \sum_j \cos \varphi_j \right)^N \Big|_{\vec{\varphi}=0} = N. \quad (1.34)$$

On trouverait de même le quatrième moment

$$\langle |\vec{\omega}(N)|^4 \rangle = \frac{(d+2)N^2 - 2N}{d}, \quad (1.35)$$

et en général, $\langle |\vec{\omega}(N)|^{2m} \rangle \sim N^m$ à l'ordre dominant en N .

De la valeur du deuxième moment, on en déduit donc qu'après un temps N , le marcheur se trouve en moyenne à une distance \sqrt{N} de son point de départ. C'est le comportement caractéristique d'une diffusion, identique à la façon dont la chaleur se propage dans une barre (cfr la solution fondamentale de l'équation de la chaleur). Si la distribution de position est effectivement centrée à l'origine, elle s'étale et s'aplatit avec le temps, et sa largeur augmente comme la racine carrée du temps.

Pour des temps arbitrairement longs, la particule va effectivement s'éloigner à des distances arbitrairement grandes, mais la question reste de savoir si elle y restera définitivement, ou si au contraire, elle a des chances de revenir au point de départ avant de repartir au loin. De même, l'éloignement moyen augmente comme \sqrt{N} après un temps N , mais que vaut la distribution des éloignements autour de cette moyenne ? Les trois sections suivantes examinent ces questions.

1.4 TEMPS DE PREMIER PASSAGE

Les temps de premier passage fournissent des informations précises et souvent utiles sur la façon dont le marcheur progresse. Dans un premier temps, considérons le temps de premier passage au point b (ou \vec{b} en dimension supérieure), que nous noterons \mathfrak{m}_b . C'est clairement un temps aléatoire, dont nous recherchons la distribution $P_0[\mathfrak{m}_b > N]$, c'est-à-dire la probabilité qu'au temps N , le marcheur ne soit pas encore passé par b (pour $b = 0$, nous définissons \mathfrak{m}_0 comme le temps de premier retour en 0). En une dimension, c'est la probabilité que le maximum de la marche soit strictement inférieur à b , $P_0[\mathfrak{m}_b > N] = P_0[\max_{s \leq N} \omega(s) < b]$.

Il est commode de s'intéresser à la probabilité $P_0[x; N \text{ et } \mathfrak{m}_b > N]$ d'être en x au temps N sans être encore passé par b , de laquelle on tire facilement $P_0[\mathfrak{m}_b > N]$ par sommation sur $x < b$. Cette probabilité satisfait une équation de récurrence (ou différentielle), tout comme $P_0(x; N)$. En effet, le marcheur sera en x au temps N sans être passé par b si il est en y au temps $N - 1$ sans être passé par b , et qu'il effectue au dernier moment le saut de y à x . On obtient dès lors que $f(x; N|b) \equiv P_0[x; N \text{ et } \mathfrak{m}_b > N]$ satisfait la même équation de diffusion que $P_0(x; N)$,

$$\begin{aligned} f(x; N|b) &= \frac{1}{2} \left[f(x-1; N|b) + f(x+1; N|b) \delta(x < b-1) \right] \\ &= \sum_{y < b} T_{x,y} f(y; N-1|b), \quad x < b, \end{aligned} \quad (1.36)$$

avec cependant la différence que x et y sont restreints à être strictement plus petits que b . Remarquons qu'en posant $f(b; N|b) = 0$, condition bien naturelle, on peut supprimer la contrainte $y < b$ et obtenir l'équation de diffusion tout à fait habituelle mais avec une condition frontière non-triviale en b ,

$$f(x; N|b) = \sum_y T_{x,y} f(y; N-1|b), \quad x, y \leq b, \quad \text{avec } f(b; N|b) = 0. \quad (1.37)$$

La contrainte de ne pas être passé en b disparaît pour $N = 0$, de sorte que la condition initiale reste donnée par $f(x; 0|b) = \delta_{x,0}$. On vérifie aisément que l'unique solution est donnée par

$$f(x; N|b) = P_0(x; N) - P_0(x-2b; N), \quad x \leq b. \quad (1.38)$$

Une manière équivalente d'écrire l'équation (1.36) mais qui se prête parfois mieux aux généralisations est la suivante. Si T^* désigne la restriction de la matrice de transition au sous-graphe sur lequel le marcheur peut se déplacer librement tout en respectant la contrainte de ne pas être passé par b , ici le graphe semi-infini $] -\infty, b-1] \cap \mathbb{Z}$, on obtient

$$f(x; N|b) = \sum_y T_{x,y}^* f(y; N-1|b) = (T^{*N})_{x,0}, \quad (1.39)$$

et par conséquent,

$$P_0[\mathfrak{m}_b > N] = \sum_x (T^{*N})_{x,0}. \quad (1.40)$$

Des exemples d'utilisation de cette formule pour des graphes finis sont proposés dans les exercices.

Revenant à la question posée à la fin de la section précédente concernant la distributions des éloignements, nous pouvons y répondre en étudiant la distribution de l'éloignement maximal de la marche,

$$P_0[\max_{s \leq N} |\vec{\omega}(s)| \leq L] = \text{probabilité que le marcheur reste confiné dans une boule de rayon } L \text{ pendant un temps } N.$$

Cette probabilité est aussi égale à $P_0[\mathbf{m}_{-L-1}, \mathbf{m}_{L+1} > N]$, la probabilité qu'au temps N , le marcheur n'ait pas encore visité les sites $\pm(L+1)$.

Pour $N \leq L$, cette probabilité est bien sûr égale à 1, et on doit s'attendre à ce qu'elle décroisse avec N (à L fixé). La décroissance devrait d'abord être douce jusque $N \sim L^2$, puisque c'est le temps moyen qu'il faut au marcheur pour atteindre la distance L , et ensuite la décroissance doit être beaucoup plus marquée, sans doute exponentielle.

Un raisonnement heuristique permet de confirmer cela. Supposons que L soit grand, et que N/L^2 le soit également. Ce que nous savons déjà des marches nous montre que la distribution de position au temps L^2 reste concentrée sur une boule de rayon L . Il est donc raisonnable de penser que la probabilité de ne pas sortir d'une boule de rayon L pendant un temps L^2 va approcher une constante $P < 1$, lorsque L tend vers l'infini. Dès lors la probabilité de ne pas sortir d'une boule de rayon L pendant un temps N , implique que le marcheur n'en sorte pas pendant les intervalles de temps de 0 à L^2 , de L^2 à $2L^2$, ... Toutes ces probabilités étant bornées par P , on en déduit que la probabilité de ne pas sortir d'une boule de rayon L pendant un temps N est majorée par $P^{N/L^2} = e^{-\frac{N}{L^2} \log P^{-1}}$, c'est-à-dire effectivement une décroissance exponentielle en N .

Afin de répondre aux questions posées, nous calculerons la distribution de probabilité de l'éloignement maximal. La probabilité $P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq \sqrt{N}]$ nous renseignera sur la probabilité que le marcheur a de dépasser son éloignement moyen. La valeur moyenne et l'écart-type du maximum compléteront nos informations.

Pour simplifier, nous effectuerons les calculs en une dimension. Les caractéristiques générales resteront cependant qualitativement les mêmes en dimension supérieure.

Comme ci-dessus, nous considérons $g(x; N|L) \equiv P_0[\omega(N) = x, \max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L]$. Le même argument que plus haut montre que cette fonction satisfait la même equation de diffusion discrète, avec cette fois deux conditions frontières en $\pm(L+1)$,

$$g(x; N|L) = \sum_y T_{x,y} g(y; N-1|L), \quad \text{avec } g(\pm(L+1); N|L) = 0. \quad (1.41)$$

L'écriture équivalente en termes de la restriction de la matrice de transition au sous-graphe autorisé fournit immédiatement la solution,

$$P_0[\omega(N) = x, \max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = (T^*)_{x,0}. \quad (1.42)$$

Le sous-graphe autorisé est simplement l'ensemble des sites entiers entre $-L$ et L , utilisé précédemment dans la section 1.1, ce qui donne immédiatement (voir (1.24))

$$P_0[\omega(N) = x, \max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{2L+1} \left(\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N \cos \frac{\pi k x}{2(L+1)}. \quad (1.43)$$

Dans le contexte où cette formule a été établie, on se souvient que N devait être plus petit que L , pour que le marcheur n'ait pas le temps d'atteindre les bords du graphe. Ici on n'impose pas cette inégalité, puisque l'on contraint précisément le marcheur à rester sur le graphe fini: arrivé à l'un des bords, il est renvoyé vers l'intérieur de l'intervalle avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Sommant l'expression (1.43) sur x , et utilisant

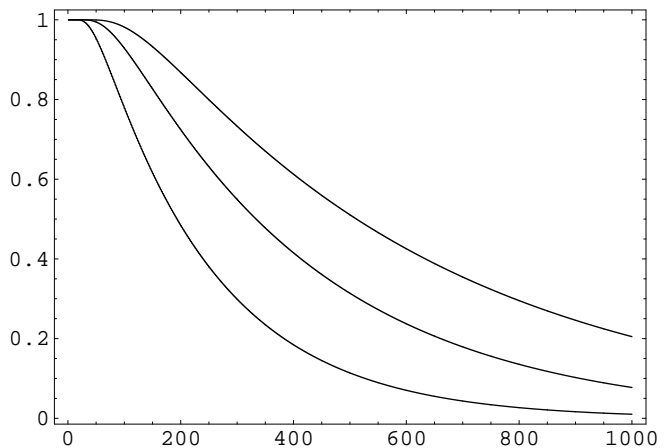
$$\sum_{x=-L}^L \cos \frac{\pi k x}{2(L+1)} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cotg \frac{\pi k}{4(L+1)}, \quad (1.44)$$

on obtient sans mal la probabilité cherchée

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{2L+1} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N \cotg \frac{\pi k}{4(L+1)}. \quad (1.45)$$

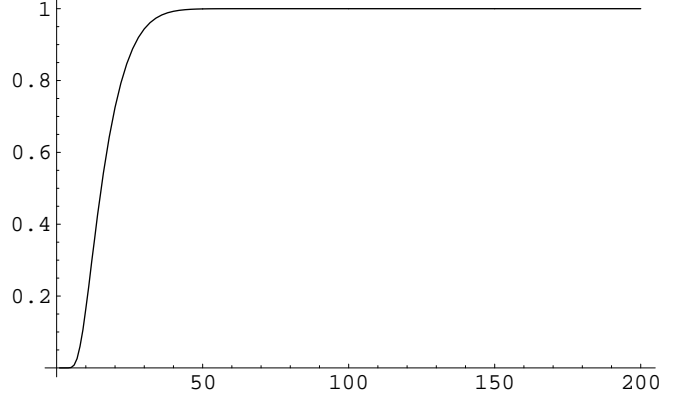
Pour $L = 15, 20$ et 25 fixé, la distribution est représentée dans la Figure 1 ci-dessous, pour $N \leq 1000$. On observe effectivement le plateau $P_0 \sim 1$ pour N petit, et une décroissance qui semble bien exponentielle pour $N \gg L^2$. La distribution à N fixé comme fonction de L est quant à elle représentée sur la Figure 2.

Figure 1: Pour L fixé, probabilité qu'après un temps N , le marcheur ne se soit pas éloigné d'une distance supérieure à L , comme fonction de N . Les courbes correspondent respectivement à $L = 15, 20$ et 25 , de la gauche vers la droite.



Analysons l'expression précédente (1.45) lorsque L est grand. Notons d'abord que ce sont les valeurs de k qui sont petites devant L qui apporteront la plus grande contribution à la somme, parce que le cosinus reste proche de 1. On remarquera que k et $2L+2-k$ donnent au cosinus une valeur identique en norme, mais que $2L+2-k$ apporte une contribution qui

Figure 2: Pour $N = 200$ fixé, probabilité qu'après un temps N , le marcheur soit resté dans l'intervalle $[-L, L]$, pour L entre 1 et N . La formule exacte (1.45) et l'expression en termes de la fonction theta (1.49) produisent deux courbes qui se confondent dès que $N \sim 30$.



est dépréciée par un facteur L^{-2} par rapport à k , à cause de la cotangente. Pour $k \ll L$, on a

$$\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \sim 1 - \frac{\pi^2 k^2}{8(L+1)^2} = \left(1 - \frac{\pi^2 k^2}{8(L+1)^2}\right)^{(L+1)^2 \cdot \frac{1}{(L+1)^2}} \sim e^{-\frac{\pi^2 k^2}{8(L+1)^2}}. \quad (1.46)$$

Le développement au premier ordre de la cotangente, $\cotg x \sim \frac{1}{x}$, donne alors (toujours pour L grand)

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}}. \quad (1.47)$$

Pour $L \ll \sqrt{N}$, le premier terme seul fournit une très bonne approximation, confirmant la décroissance exponentielle annoncée. Que la probabilité tende vers zéro lorsque N tend vers l'infini, quel que soit L , montre qu'après un temps suffisamment grand, le marcheur sort de n'importe quel intervalle $[-L, +L]$, avec probabilité 1, c'est-à-dire qu'il visitera n'importe quel site, aussi éloigné soit-il du point de départ, et cela avec probabilité 1. Ce résultat reste valable en n'importe quelle dimension: avec probabilité 1, le marcheur sort de n'importe quelle boîte/boule fixée.

On notera que la série (1.47), pour tout N fixé, reproduit correctement une probabilité égale à 1 lorsque $L \rightarrow \infty$, en vertu de $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$.

Mentionnons aussi que cette série infinie définit une fonction qui se trouve être reliée à des fonctions classiques, à savoir les fonctions theta elliptiques. L'une d'entre elles est définie par

$$\theta_2(z|\tau) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} e^{\frac{i\pi k^2 \tau}{4}} \cos kz = 2q^{\frac{1}{4}} \cos z \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})(1 + 2q^{2m} \cos 2z + q^{4m}), \quad (1.48)$$

avec $q = e^{i\pi\tau}$ (conventions de Whittaker et Watson, *A course of Modern Analysis*). On voit

facilement qu'en termes de cette fonction, on a (pour N suffisamment grand)

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \theta_2(z | \frac{i\pi N}{2(L+1)^2}). \quad (1.49)$$

Revenons maintenant aux questions principales de cette section. Que peut-on dire de la probabilité que le marcheur a de dépasser son point d'éloignement moyen \sqrt{N} ? En mettant $L = \sqrt{N}$ dans l'expression (1.47), et en ne conservant que le premier terme, on trouve

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq \sqrt{N}] \sim \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{8}} \sim 0.3708, \quad (1.50)$$

qui donne une bonne approximation de la quantité P introduite plus tôt. C'est aussi ce que l'on peut voir sur les graphes de la Figure 1.

La probabilité est donc supérieure à $\frac{1}{2}$ que le marcheur dépasse le point \sqrt{N} . Dans quelles proportions ?? Pour s'en rendre compte, calculons la valeur moyenne du maximum et l'écart-type de sa distribution.

La moyenne du maximum est donnée par

$$\langle \max_{s \leq N} |\omega(s)| \rangle = \sum_{L=1}^N L P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| = L] = (N+1) - \sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L]. \quad (1.51)$$

L'analyse de la somme, détaillée plus bas, montre que la moyenne augmente comme \sqrt{N}

$$\langle \max_{s \leq N} |\omega(s)| \rangle = \sqrt{\frac{\pi N}{2}} - \frac{1}{2} + \dots \quad (1.52)$$

où les points représentent une correction qui s'annule dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Ce résultat ne devrait pas surprendre, mais on peut prendre note de la valeur numérique du coefficient $\sqrt{\pi/2} = 1.2533$, qui signifie qu'en moyenne, le marcheur dépasse le point d'éloignement moyen ($= \sqrt{N}$) de 25%.

Le calcul du second moment est similaire à celui de la moyenne (voir ci-dessous). On trouve qu'il augmente linéairement avec N :

$$\langle (\max_{s \leq N} |\omega(s)|)^2 \rangle = 2GN - \sqrt{\frac{\pi N}{2}} + \frac{G+1}{3} + \dots \quad (1.53)$$

où les points ont la même signification que ci-dessus, et où $G = 0.915966$ est la constante de Catalan.

On en déduit immédiatement que l'écart-type de la distribution du maximum autour de sa moyenne est lui aussi proportionnel à \sqrt{N}

$$\left[\langle (\max_{s \leq N} |\omega(s)|)^2 \rangle - \langle \max_{s \leq N} |\omega(s)| \rangle^2 \right]^{1/2} \sim \sqrt{\left(2G - \frac{\pi}{2}\right)N} = 0.511\sqrt{N}. \quad (1.54)$$

L'enseignement à tirer est donc qu'après un temps N , le marcheur ne s'est pas éloigné en moyenne d'une distance supérieure à un multiple de \sqrt{N} , et cela avec des fluctuations d'ordre \sqrt{N} . La probabilité qu'il soit resté à une distance au plus égale à environ 2 fois \sqrt{N} est donc pratiquement égale à 1. C'est bien ce que l'on peut voir sur la courbe de la Figure 2 (pour laquelle $2\sqrt{200} \sim 30$).

Ces conclusions restent qualitativement correctes en dimension supérieure. Le strict analogue du calcul qui précède n'est pas simple en dimension $d \geq 2$, du fait que l'on considère le maximum de la norme euclidienne de la marche (il pourrait par contre s'effectuer dans le cadre du mouvement brownien, considéré dans le second chapitre). Nous pourrions le remplacer —il n'y a pas de raison de penser que les réponses soient fondamentalement différentes— par un problème légèrement différent mais faisable, à savoir le calcul de la probabilité que le marcheur ne sorte pas du cube $[-L, L]^d$ (distribution du maximum de la norme l^∞ de $\vec{\omega}(s)$, donnée par $|\vec{\omega}(s)|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |\omega_i(s)|$).

Le calcul de la moyenne du maximum peut s'effectuer comme suit. Nous partons de la série (1.47) que nous sommions sur L . La formule d'Euler–MacLaurin,

$$\sum_{L=1}^N F(L) = \int_0^N F(x) + \frac{1}{2}[F(N) - F(0)] + \frac{1}{12}[F'(N) - F'(0)] - \frac{1}{720}[F'''(N) - F'''(0)] + \dots \quad (1.55)$$

nous permet de remplacer la somme par une intégrale. On obtient, en négligeant tous les termes qui s'annulent lorsque $N \rightarrow \infty$,

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \int_0^N dL e^{-\frac{k^2 \pi^2 N}{8(L+1)^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{k^2 \pi^2 N}{8(N+1)^2}}. \quad (1.56)$$

Le deuxième terme du membre de droite est une série infinie, uniformément convergente en N . Par conséquent, limite $N \rightarrow \infty$ et sommation peuvent être échangées, ce qui donne le résultat $\frac{\pi}{4}$, avec une convergence exponentielle en N , comme on peut le montrer par la technique utilisée ci-dessous (la dérivée par rapport à N de la série est reliée à la fonction $\theta_1'(0|\tau)$ utilisée plus bas).

En ce qui concerne le premier terme, on effectue d'abord une translation $L' = L + 1$. Elle amène une intégrale sur l'intervalle $[1, N + 1]$ que l'on peut changer en $[0, N + 1]$ (à des termes exponentiellement petits). Effectuant ensuite le changement de variable $y = \frac{1}{L'}$, on obtient

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}}. \quad (1.57)$$

Utilisant $\frac{1}{y^2} = -d_y \frac{1}{y}$ et intégrant une fois par parties, on trouve

$$\frac{1}{2} + \frac{4(N+1)}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{k^2 \pi^2 N}{8(N+1)^2}} - \pi N \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} dy e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}}. \quad (1.58)$$

Le première série est identique à celle que l'on a rencontré plus haut, et donne $\frac{\pi}{4}$ à des corrections exponentielles. La seconde série pose plus de problèmes. On peut voir que l'intégrand est exponentiellement petit

sur une grosse partie du domaine d'intégration, mais par contre est d'ordre 1 (pour k petit) dans le voisinage de la borne inférieure. Une estimation propre est possible en tirant parti de l'observation faite plus haut que les séries que l'on manipule ici sont reliées à des fonctions theta. Pour les besoins de la cause, on introduit cette fois la fonction $\theta_1(z|\tau)$, définie par

$$\theta_1(z|\tau) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} e^{\frac{i\pi k^2 \tau}{4}} \sin kz = 2q^{\frac{1}{4}} \sin z \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})(1 - 2q^{2m} \cos 2z + q^{4m}), \quad (1.59)$$

avec, comme auparavant, $q = e^{i\pi\tau}$.

Si le prime dénote la dérivée par rapport à la variable z , on trouve effectivement que la série dans l'expression précédente est proportionnelle à $\theta_1'(0|\frac{i\pi y^2 N}{2})$. L'intérêt de cette observation réside dans le fait que la fonction θ_1 satisfait une identité remarquable (appelée transformation modulaire, voir exercices):

$$\theta_1(z|\tau) = \frac{i}{\sqrt{-i\tau}} e^{-\frac{iz^2}{\pi\tau}} \theta_1\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right). \quad (1.60)$$

Dérivant par rapport à z et mettant $z = 0$, on obtient l'identité $\theta_1'(0|\tau) = (-i\tau)^{-\frac{3}{2}} \theta_1'(0|-\frac{1}{\tau})$. En l'insérant dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = N + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{8}{\pi N}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^3} e^{-\frac{k^2}{2Ny^2}}. \quad (1.61)$$

L'intégrale sur y est élémentaire et donne

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = N + \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{8N}{\pi}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \left[e^{-\frac{k^2(N+1)^2}{2N}} - 1 \right] = N - \sqrt{\frac{\pi N}{2}} + \frac{3}{2}, \quad (1.62)$$

à des termes exponentiellement petits près. La valeur donnée plus haut pour la moyenne du maximum s'ensuit.

Le calcul du second moment

$$\left\langle \left(\max_{s \leq N} |\omega(s)| \right)^2 \right\rangle = (N+1)^2 - \sum_{L=1}^N (2L+1) P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] \quad (1.63)$$

est semblable. En prenant les précautions nécessaires dans l'application de la formule d'Euler–MacLaurin, on obtient par la même technique que

$$\sum_{L=1}^N L P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{N^2}{2} - (G - \frac{1}{2})N + \sqrt{\frac{\pi N}{2}} - \frac{5 + 2G}{12}, \quad (1.64)$$

plus des corrections qui s'annulent dans la limite $N \rightarrow \infty$. La constante de Catalan apparaît comme somme de la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$.

1.5 LA LOI DU LOGARITHME ITÉRÉ

Les résultats de la section précédente, qui donnent des informations sur la façon dont le marcheur diffuse sur le réseau, peuvent être considérablement raffinés.

En une dimension, on sait que le marcheur a une tendance naturelle à s'éloigner de son point de départ, et de diffuser dans une portion de plus en plus large du réseau. On peut traduire cette idée en disant que "la position du marcheur est une fonction croissante du temps". Ça ne peut évidemment pas être littéralement correct, puisque le marcheur retourne à l'origine, passe du temps dans la partie négative de l'axe, ... Une formulation plus précise dirait que le supremum de la position jusqu'au temps N est une fonction croissante, mais une telle affirmation est complètement triviale. Par contre une estimation précise sur la croissance du supremum est elle hautement non-triviale.

C'est justement ce que donne le superbe résultat suivant, que l'on mentionnera sans démonstration. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite non-décroissante de nombres réels positifs, et $x(n)$ la position du marcheur au temps n (c'est une variable aléatoire). Alors

$$P_0[x(n) \geq \sqrt{n}a_n \text{ i.s.}] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-\frac{a_n^2}{2}} \begin{cases} \text{converge,} \\ \text{diverge,} \end{cases} \quad (1.65)$$

où les lettres i.s. signifient infiniment souvent.

Par exemple, une suite constante confirme les résultats de la section précédente: le marcheur a une grande probabilité de dépasser son point d'éloignement moyen et donc de se trouver à droite de celui-ci.

Sur base du résultat, on peut essayer de préciser la croissance de $x(n)$ en cherchant une suite avec une croissance maximale et qui assure en même temps la divergence de la série. Un moment de réflexion montre que la suite ne peut croître comme une puissance positive de n , ni même logarithmiquement, mais par contre peut croître comme le logarithme d'un logarithme.

Ce qui mène à la célèbre loi du logarithme itéré: on a

$$P_0[x(n) \geq \sqrt{2\lambda n \log \log n} \text{ i.s.}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq 1, \\ 0 & \text{si } \lambda > 1. \end{cases} \quad (1.66)$$

Cette borne ne peut pas être significativement améliorée.

1.6 TEMPS LOCAL: RÉCURRENCE ET TRANSIENGE

La section précédente a établi de façon assez précise la manière dont le marcheur diffuse sur le réseau. Elle a en particulier montré qu'il effectue des excursions arbitrairement loin de son point de départ, avec probabilité 1. Un élément important qui nous manque encore est de savoir si, après s'être éloigné à des distances arbitrairement grandes, le marcheur revient vers son point de départ, ou si au contraire il reste piégé à l'infini (i.e. ne revient plus dans n'importe quelle boîte finie).

On peut y répondre en étudiant le nombre moyen de retours à l'origine, ou de façon équivalente, le temps moyen que le marcheur passe à l'origine (puisque chaque fois qu'il y passe, il y reste une seconde). Le temps passé en un site \vec{x} pendant un temps N est une variable aléatoire —on l'appelle un temps local— que l'on désignera par $\tau(\vec{x}, N)$. On s'intéressera à sa valeur moyenne $G(\vec{x}) \equiv \langle \tau(\vec{x}, +\infty) \rangle$ lorsqu'on laisse la marche se dérouler indéfiniment. (En théorie quantique des champs, cette fonction s'appellera un propagateur, ou une fonction de Green !)

Pour calculer le temps local, définissons les variables binaires aléatoires $I_n(\vec{x})$: $I_n(\vec{x})$ prend la valeur 1 si le marcheur se trouve en \vec{x} au temps n , et 0 sinon. On a clairement que $I_n(\vec{x})$ vaut 1 avec probabilité $P_0(\vec{x}; n)$, de sorte que la moyenne de $I_n(\vec{x})$ est simplement $\langle I_n(\vec{x}) \rangle = P_0(\vec{x}; n)$. Le temps local lui-même s'écrit bien sûr $\tau(\vec{x}, N) = \sum_{n=0}^N I_n(\vec{x})$.

La valeur moyenne du temps local à l'origine et pour un temps infini vaut donc

$$G(0) = \langle \tau(0, +\infty) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_0(0; N) = d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{d - \sum_i \cos \varphi_i}. \quad (1.67)$$

On voit facilement que l'intégrand possède une divergence en $\vec{\varphi} = 0$, et la question revient à voir si cette divergence est intégrable. En développant les cosinus, on trouve que le dénominateur se comporte comme $\frac{1}{2}|\vec{\varphi}|^2$. En passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$G(0) \sim 2d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{|\vec{\varphi}|^2} \sim \text{const} \int_0^\infty d|\varphi| |\varphi|^{d-3} = \begin{cases} +\infty & \text{pour } d = 1, 2, \\ \text{fini} & \text{si } d \geq 3. \end{cases} \quad (1.68)$$

Après un temps infini, le marcheur sera revenu en moyenne une infinité de fois à son point de départ si $d = 1$ ou 2 , alors qu'il n'y reviendra qu'un nombre fini de fois en dimension $d \geq 3$.

Ce résultat possède une implication directe sur la probabilité p que le marcheur a de revenir à son point de départ. En effet, si p est cette probabilité, p^m est celle de revenir au moins m fois, et donc $p^m - p^{m+1} = p^m(1 - p)$ est celle de revenir exactement m fois. Dès lors, le temps moyen calculé plus haut vaut

$$G(0) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} m p^m (1 - p) = \frac{1}{1 - p}. \quad (1.69)$$

La divergence du temps moyen passé à l'origine implique donc $p = 1$, c'est-à-dire la certitude d'y revenir. C'est la propriété de récurrence bien connue des marches aléatoires en une et deux dimensions. A l'inverse, un temps moyen fini implique $p < 1$, et donc une probabilité non-nulle de ne jamais y revenir: les marches sont transientes en dimension plus grande ou égale à trois.

Bien entendu, le même raisonnement s'applique au temps moyen passé en n'importe quel autre point,

$$G(\vec{x}) = d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{x}}}{d - \sum_i \cos \varphi_i}, \quad (1.70)$$

puisque c'est le comportement en $\vec{\varphi} = \vec{0}$ qui est déterminant.

En dimension $d \geq 3$, la valeur $p < 1$ implique que la probabilité vaut 1 que le marcheur finit par "s'échapper à l'infini". Car $p < 1$ entraîne que la probabilité d'une infinité de retours à l'origine est nulle. Le marcheur y revient (peut-être) un nombre fini de fois, et ensuite n'y revient plus jamais. Comme la même propriété est vraie de n'importe quel point, il n'a plus la possibilité de revenir dans aucune boîte finie. La transience de la marche s'exprime donc aussi en disant

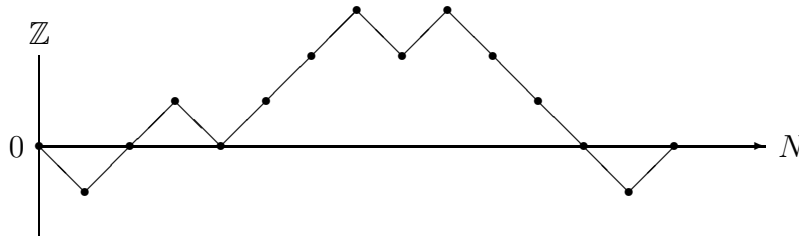
$$\text{Prob}[\lim_{N \rightarrow \infty} |\vec{\omega}(N)| = +\infty] = 1. \quad (1.71)$$

A titre indicatif, la probabilité p se calcule en comparant les deux expressions ci-dessus pour la moyenne $G(0)$. En dimension 3, on trouve ainsi $p = 0.34$, ce qui donne un nombre moyen de retours à l'origine égal à 0.52. En dimension 4 et 5, on a respectivement $p = 0.19$ et $p = 0.135$, et en général une décroissance en $\frac{1}{d}$ pour d grand.

Cette différence de comportement récurrent/transient est la distinction la plus marquante entre les basses et les hautes dimensions, et bon nombre de propriétés des marches y sont reliées (comme celles d'intersection). Elle possède aussi des applications étonnantes. En mécanique quantique, il est bien connu que n'importe quel potentiel attractif, aussi peu profond soit-il, possède toujours, en une et deux dimensions, au moins un état lié, alors que ce n'est pas le cas en dimension supérieure ! La dépendance dimensionnelle dans les deux problèmes est frappante, mais un lien direct entre les deux affirmations n'est pas à ce stade évident ... Nous montrerons au chapitre suivant que pourtant une connexion directe existe, et argumenterons même que l'une est une conséquence de l'autre.

1.7 LA PREMIÈRE LOI DE L'ARCSINUS

Les marches aléatoires étant symétriques autour de l'origine, on peut sans danger conclure qu'en moyenne, le marcheur passera autant de temps à gauche qu'à droite de l'origine (en une dimension). On peut raisonnablement penser aussi qu'il y a une grande probabilité qu'il passe effectivement de chaque côté à peu près la moitié du temps, sans doute avec des fluctuations. Si donc on considère la probabilité que le marcheur passe un temps k du côté positif de l'axe sur une durée totale N , on s'attend à ce que cette probabilité soit maximale pour k de l'ordre de $\frac{N}{2}$. Le calcul explicite montre que c'est exactement le contraire qui se passe.



Dénotons par $p_{2N}(2k)$ la probabilité que pendant un temps $2N$, la marche passe un temps exactement égal à $2k$ dans la partie positive de l'axe. L'entier k prend toutes les valeurs

entre 0 et N . Ce que l'on entend exactement par "passer un temps $2k$ dans la partie positive de l'axe" est illustré sur la figure précédente (temps en abscisse), sur laquelle est représenté un chemin de longueur 14, qui passe un temps 10 dans la partie positive et un temps 4 dans la partie négative. (On procède donc à un décompte des segments de chemins plutôt que de positions successives.)

Considérons d'abord $k = 0$. La probabilité $p_{2N}(0)$ est celle que la marche reste tout le temps du côté négatif, ou de façon équivalente, celle que le temps de premier passage \mathbf{m}_1 en $x = 1$ soit supérieur à $2N$. Par un des exercices, cette probabilité vaut

$$p_{2N}(0) = P_0[\mathbf{m}_1 > 2N] = \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{N}, \quad (1.72)$$

qui est aussi la probabilité $P_0(0; 2N)$ que le marcheur soit précisément de retour à l'origine au temps $2N$! Par symétrie, on a la même probabilité pour $k = N$, $p_{2N}(2N) = p_{2N}(0)$.

Si $1 \leq k \leq N - 1$, la marche passe nécessairement par l'origine, disons au temps $2r$ pour la première fois. La probabilité correspondante, celle de revenir en 0 pour la première fois au temps $2r$, sera notée f_{2r} . Entre son départ et le temps $2r$, la marche est soit restée du côté positif de l'axe, soit du côté négatif, et on traite les deux situations séparément (ce sont des événements disjoints).

Dans le premier cas, l'entier r varie entre 1 et k , et la contribution à $p_{2N}(2k)$ est donnée par

$$\frac{1}{2} f_{2r} p_{2N-2r}(2k - 2r). \quad (1.73)$$

Effectivement, les deux premiers termes $\frac{1}{2} f_{2r}$ donnent la probabilité de revenir en 0 pour la première fois en $2r$ tout en étant resté du côté positif, alors que le troisième facteur suit de la définition de $p(\cdot)$.

Dans le second cas, r prend ses valeurs entre 1 et $N - k$, et la contribution correspondante vaut

$$\frac{1}{2} f_{2r} p_{2N-2r}(2k). \quad (1.74)$$

Ces contributions provenant d'événements disjoints, la probabilité $p_{2N}(2k)$ est simplement leur somme, ce qui donne

$$p_{2N}(2k) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} p_{2N-2r}(2k - 2r) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N-k} f_{2r} p_{2N-2r}(2k). \quad (0 < k < N) \quad (1.75)$$

Montrons par induction que la solution est donnée par

$$p_{2N}(2k) = p_{2k}(0) p_{2N-2k}(0) = P_0(0; 2k) P_0(0; 2N - 2k). \quad (1.76)$$

Par les résultats relatifs à $k = 0$ et $k = N$, l'expression est correcte pour $N = 1$. Montrons que si elle est correcte pour $p_{2m}(\cdot)$, $1 \leq m \leq N - 1$, elle le sera aussi pour $p_{2N}(\cdot)$.

On peut voir de (1.75) que p_{2N} ne dépend que des p_{2m} , et y insérant l'Ansatz (1.76), on trouve

$$p_{2N}(2k) = \frac{1}{2}p_{2N-2k}(0) \sum_{r=1}^k f_{2r}p_{2k-2r}(0) + \frac{1}{2}p_{2k}(0) \sum_{r=1}^{N-k} f_{2r}p_{2(N-k)-2r}(0). \quad (1.77)$$

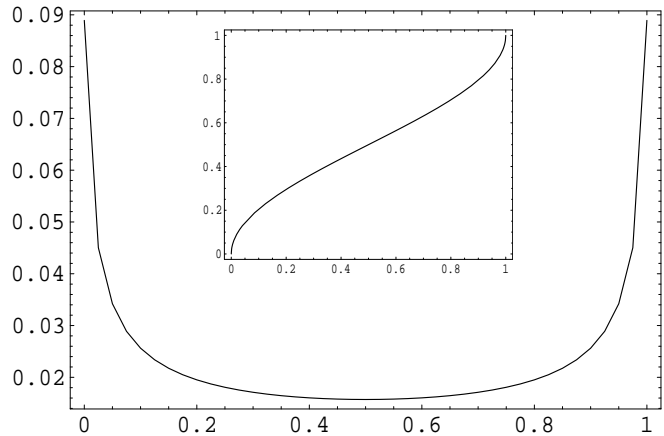
La première somme implique la probabilité que le premier retour en 0 se fasse au temps $2r$ suivi par un retour au temps $2k - 2r$, et correspond donc à la décomposition de l'événement "être de retour en 0 au temps $2k$ " en termes des temps de premier retour à l'origine, qui sont à nouveau des événements disjoints. La somme vaut donc $P_0(0; 2k) = p_{2k}(0)$. La deuxième somme se traite de la même manière et vaut $P_0(0; 2N - 2k) = p_{2N-2k}(0)$, ce qui établit le résultat et complète l'induction.

On a donc la probabilité recherchée, sous forme explicite, comme étant

$$p_{2N}(2k) = \frac{1}{2^{2N}} \binom{2k}{k} \binom{2N - 2k}{N - k}. \quad (1.78)$$

Une première propriété de ce résultat est qu'il est symétrique sous $k \leftrightarrow N - k$: la probabilité de rester peu de temps sur l'axe positif égale la probabilité d'y passer beaucoup de temps. C'est conforme à l'intuition, puisque si la marche a peu de chance de rester presque tout le temps positive, elle a aussi peu de chance de rester presque tout le temps négative.

Figure 3: Probabilité de passer à droite de l'origine une fraction de temps égale à α (en abscisse). En encart, la probabilité intégrée (fonction de répartition) que le marcheur y passe une fraction inférieure ou égale à α .



La réelle surprise est que ces deux régimes extrêmes sont les plus probables ! La figure 3 montre bien que la probabilité est maximale de passer une fraction de temps soit faible soit importante sur l'axe positif, et que celle d'y passer la moitié du temps est minimale ! On a ici une magnifique et surprenante illustration qu'un comportement typique peut être très différent d'un comportement moyen ...

On peut rendre les tendances de la courbe plus apparentes en remplaçant l'expression (1.78) par sa valeur asymptotique lorsque $1 \ll k \ll N$. En utilisant la formule de Stirling,

$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, on trouve facilement que la probabilité de passer une fraction de temps $\alpha = \frac{k}{N} \leq 1$ sur l'axe positif vaut

$$p_{2N}(2k) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(N-k)}}. \quad (1.79)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F(\alpha) \equiv P_0[\text{fraction de temps dans } \mathbb{Z}_+ \leq \alpha] &= \sum_{k=0}^{\alpha N} p_{2N}(2k) \sim \int_0^{\alpha N} dk \frac{1}{\pi \sqrt{k(N-k)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Cette fonction est également représentée sur la Figure 3. Comme discuté plus haut, la particularité la plus remarquable concerne les valeurs aux deux bords. Ainsi, la probabilité que le marcheur passe au moins 90% de son temps à droite de l'origine vaut environ $\frac{1}{5}$, ce qui semble énorme !

Par contre, la probabilité que le marcheur passe au plus la moitié de son temps sur l'axe positif est égale à $\frac{1}{2}$, comme il se doit sur base de la symétrie ($F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$). La moyenne est également celle que l'on attend

$$\langle \text{fraction de temps dans } \mathbb{Z}_+ \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha du \frac{u}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{1}{2}, \quad (1.81)$$

avec un écart-type important, égal à $\frac{1}{\sqrt{8}} \sim 0.35$.

1.8 MARCHES PONDÉRÉES

Nous terminerons notre tour des marches aléatoires discrètes en formulant une généralisation qui nous sera utile et instructive pour la suite.

La particularité (simplificatrice) des marches que l'on a discutées jusqu'ici est que tous les chemins de même longueur ont même probabilité. Et en particulier les probabilités ne dépendent pas des sites visités.

La généralisation que l'on veut considérer consiste justement à mettre des poids différents sur les sites du réseau (lequel reste le réseau cubique \mathbb{Z}^d). Les probabilités (relatives) de transition seront à présent données par

$$p(\vec{y} \rightarrow \vec{x}) \sim \frac{w(\vec{x})}{2d} \delta_{(\vec{x}, \vec{y})}. \quad (1.82)$$

La fonction delta indique, comme précédemment, que le marcheur ne peut sauter que sur un site plus proche voisin, mais les probabilités relatives de saut sont maintenant spécifiées par

les nombres w . Les poids w sont pour le moment quelconques (positifs tout de même), et ne satisfont pas de condition de normalisation. Par conséquent les probabilités de transition (1.82) ne sont pas normalisées à 1, ce que rappelle le symbole \sim .

Les perturbations que l'on peut introduire via le choix des poids w sont diverses. On peut introduire des anisotropies locales ou même envisager des perturbations aléatoires, en décidant que les poids w sont eux-même des variables aléatoires. En fonction du choix que l'on fait, les propriétés asymptotiques des marches peuvent changer ou ne pas changer (propriétés diffusives, récurrence/transience,...). Cette question sera le thème majeur du chapitre 3.

L'étude du processus stochastique correspondant à ces marches implique de considérer les probabilités de transition normalisées, données par

$$T_{x,y}^{\text{norm}} = \frac{w(x)}{2dA(y)} \delta_{\langle x,y \rangle}, \quad A(y) = \sum_{\langle x,y \rangle} \frac{w(x)}{2d}. \quad (1.83)$$

Les distributions de position sont données en termes des puissances de la matrice T^{norm} . Elles sont correctement normalisées et se propagent dans le temps (satisfont l'équation de Chapman–Kolmogorov de la section 1.2). Elles sont cependant techniquement compliquées à obtenir en raison de la dépendance non-triviale de la matrice T^{norm} dans les positions initiale et finale de saut.

Si par contre on décide d'oublier pour un instant le facteur de normalisation, la “probabilité” de partir de \vec{y} et d'arriver en \vec{x} au temps N *en ayant emprunté un certain chemin* ω est égale à

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N | \omega) = \prod_{i=1}^N \frac{w(\omega(i))}{2d}, \quad (1.84)$$

et celle sans restriction sur le chemin emprunté vaut

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N) = \sum_{\omega: |\omega|=N} \prod_{i=1}^N \frac{w(\omega(i))}{2d}. \quad (1.85)$$

Cette “probabilité” satisfait une équation différentielle, comme dans le cas des marches standards, avec les dérivées spatiales par rapport au point de départ ou d'arrivée:

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N+1) = \frac{w(\vec{x})}{2d} \sum_{i=1}^d \left[P_{\vec{y}}^w(\vec{x} + \vec{e}_i; N) + P_{\vec{y}}^w(\vec{x} - \vec{e}_i; N) \right], \quad (1.86)$$

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N+1) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[w(\vec{y} + \vec{e}_i) P_{\vec{y} + \vec{e}_i}^w(\vec{x}; N) + w(\vec{y} - \vec{e}_i) P_{\vec{y} - \vec{e}_i}^w(\vec{x}; N) \right]. \quad (1.87)$$

La “distribution” de position peut être calculée en termes de la matrice de transition non-normalisée $T_{\vec{x},\vec{y}} = \frac{w(\vec{x})}{2d} \delta_{\langle \vec{x},\vec{y} \rangle}$ de la façon habituelle $P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N) = (T^N)_{\vec{x},\vec{y}}$, ce qui assure la

validité de l'équation de Chapman–Kolmogorov. En termes des opérateurs différentiels discrets définis à la section 1, on a

$$\partial_N P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \Delta_{\vec{x}} P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N) + \frac{w(\vec{x}) - 1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[P_{\vec{y}}^w(\vec{x} + \vec{e}_i; N) + P_{\vec{y}}^w(\vec{x} - \vec{e}_i; N) \right], \quad (1.88)$$

$$\begin{aligned} \partial_N P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N) &= \frac{1}{2d} \Delta_{\vec{y}} P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N) \\ &+ \sum_{i=1}^d \left[\frac{w(\vec{y} + \vec{e}_i) - 1}{2d} P_{\vec{y} + \vec{e}_i}^w(\vec{x}; N) + \frac{w(\vec{y} - \vec{e}_i) - 1}{2d} P_{\vec{y} - \vec{e}_i}^w(\vec{x}; N) \right]. \quad (1.89) \end{aligned}$$

qui apparaissent toutes deux comme une équation de la chaleur perturbée.

N'ayant pas utilisé des probabilités de transition correctement normalisées, les quantités $P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N)$ ne sont pas des distributions de probabilité (bien que satisfaisant l'équation de Chapman–Kolmogorov). On peut en faire des distributions en les divisant par leur normalisation $Z_N(\vec{y}) = \sum_{\vec{x}} P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N)$, mais les distributions obtenues ne seront bien sûr pas celles de la marche pondérée définie plus haut (elles perdent aussi la propriété de Markov, voir section 1.2, et ne satisfont plus l'équation de Chapman–Kolmogorov).

Strictement parlant, les quantités $P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N)$ ne sont donc pas relevantes pour la marche définie par un système de poids w . Ce sont pourtant elles qui joueront un rôle important dans la suite. Nous admettrons simplement qu'elles spécifient des distributions (lorsqu'on les normalise par Z_N) reliées à une certaine forme de perturbation des marches standards.

Nous verrons dans le chapitre suivant que la limite continue de ces marches perturbées, et celles des “probabilités” $P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N)$, nous conduira sur un terrain familier, qui pourrait s'appeler: formulation de Feynman de la mécanique quantique ...

APPENDICE: THÉORÈMES TAUBÉRIENS

Les théorèmes taubériens, de façon générale, réfèrent à des résultats permettant, sur base d'une singularité d'une série de puissance ou d'une transformée intégrale, de déduire le comportement asymptotique des coefficients de la série ou de la fonction originale (dans le cas d'une transformée). Nous les énoncerons ici pour les séries (théorème taubérien discret), et pour la transformée de Laplace. Il en existe des versions plus générales, faisant des hypothèses plus faibles, mais les deux résultats qui suivent nous suffiront.

Théorème pour les séries

Soit $F(\lambda) = \sum_{n \geq 0} c_n \lambda^n$ une série à coefficients c_n positifs et monotones, convergente pour $0 \leq \lambda < 1$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes,

1. $\sum_{n \geq 0} c_n \lambda^n \sim (1 - \lambda)^{-\rho} L(\frac{1}{1-\lambda})$ lorsque $\lambda \rightarrow 1^-$,
2. $c_n \sim \frac{n^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} L(n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$,

pour autant que $\rho > 0$ et que la fonction L soit à variation lente à l'infini, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow \infty} L(\kappa x)/L(x) = 1$ pour tout κ positif fixé ($L(x)$ est donc, pour grands x , essentiellement de degré 0 en x).

Théorème pour la transformée de Laplace

Soit $F(t) \geq 0$ une fonction monotone à l'infini, telle que sa transformée de Laplace $\widehat{F}(\alpha) = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} F(t)$ existe pour $\alpha > 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes,

1. $\widehat{F}(\alpha) \sim \alpha^{-\rho} L(\frac{1}{\alpha})$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$,
2. $F(t) \sim \frac{t^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} L(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$,

si $\rho > 0$ et si L est une fonction à variation lente à l'infini (voir plus haut).

Marches aléatoires sur des graphes finis

1. Considérer une marche aléatoire sur une chaîne circulaire (un cercle discrétisé), comportant L sites. A chaque unité de temps, le marcheur effectue un saut vers le site gauche ou le site droit avec égale probabilité $\frac{1}{2}$.

Ecrire la matrice de transition et calculer la distribution $P_a(b; N)$ à temps fini, et ensuite étudier sa limite lorsque N tend vers l'infini. Montrer qu'elle tend vers une distribution uniforme si L est impair

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_a(b; N) = \frac{1}{L}. \quad (1.90)$$

Pour L pair, vérifier qu'elle oscille entre deux distributions (normal, pourquoi ?) qui sont une distribution uniforme sur les sites pairs et une distribution uniforme sur les sites impairs.

Étudier l'approche à ces distributions asymptotiques, i.e. déterminer les premières corrections pour des temps grands mais finis.

2. Répéter l'exercice précédent pour le cas d'une chaîne ouverte de longueur L . On suppose à nouveau que la marche est symétrique dans le sens que le marcheur effectue un pas vers la gauche ou vers la droite avec probabilité $\frac{1}{2}$, sauf aux deux bords où le marcheur est réfléchi avec probabilité 1.

Calculer la distribution de position $P_a(b; N)$, et en chercher la forme asymptotique lorsque N tend vers l'infini. Montrer qu'ici aussi, il y a une oscillation: les limites sur les temps pairs ou impairs sont bien définies mais distinctes.

Vérifier que les deux distributions limites sont quasi-uniformes sur les sites où elles sont non-nulles: par exemple, si L et $N + a$ sont pairs, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_a(b; N) = \frac{1}{L-1} (1, 0, 2, 0, 2, \dots, 0, 2, 0)_b. \quad (1.91)$$

(Attention ! La matrice de transition T n'est pas normale, mais diagonalisable: les vecteurs propres à gauche sont distincts des vecteurs propres à droite.)

3. Envisager une généralisation des deux exercices précédents à un graphe quelconque. Exprimer la distribution $P_a(b; N)$ en termes des données spectrales de T , i.e. la matrice d'adjacence du graphe pondérée par les probabilités des sauts (et donnant les probabilités de transition), et étudier sa limite lorsque N tend vers l'infini. On supposera pour cela que T est diagonalisable: il existe une matrice inversible A telle que ATA^{-1} est diagonale.

(Indications: introduire dans la discussion la colorabilité du graphe: un graphe est n -coloriable si les sites peuvent être coloriés de n couleurs, de telle sorte que les sites de couleur C_k ne sont reliés qu'à des sites de couleur C_{k+1} . Utiliser le théorème de Perron-Frobenius (voir p.e. le livre de H. Minc, "Nonnegative Matrices").)

4. Considérer la marche aléatoire sur les sommets d'un carré, avec égale probabilité $\frac{1}{2}$ de sauter d'un sommet vers n'importe lequel des deux sommets voisins. Soit T la matrice de transition correspondante. Montrer que la probabilité que, partant du sommet a , le marcheur ne passe pas par $b \neq a$ avant le temps N vaut (voir (1.40))

$$P_a[\mathbf{m}_b > N] = \sum_c (T^{*N})_{ca}, \quad (1.92)$$

où T^* est la matrice T privée de sa b -ème ligne et de sa b -ème colonne. En déduire que, partant d'un sommet du carré, le temps moyen $\langle \mathbf{m} \rangle$ nécessaire pour atteindre le sommet opposé vaut exactement 4. En trois dimensions (sur un cube donc), ce temps moyen de premier passage vaut 10 !

5. Généraliser l'exercice précédent en dimension d .

Pour cela, observer, si cela n'a pas déjà été fait, que les symétries du carré et du cube permettent de réduire le problème à une marche sur les graphes obtenus en quotientant le carré et le cube par leur symétries, à savoir $\overset{0}{\circ} - \overset{1}{\circ} - \overset{2}{\circ}$ pour le carré, et $\overset{0}{\circ} - \overset{1}{\circ} - \overset{2}{\circ} - \overset{3}{\circ}$ pour le cube, avec les matrices de transition suivantes

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

Les noeuds des graphes sont numérotés de 0 à d , le noeud k désignant, dans le d -cube correspondant, la collection S_k des sommets ayant k coordonnées égales à 1 et $d - k$ coordonnées nulles ($|S_k| = \binom{d}{k}$). Chaque sommet de S_k est relié à k sommets de S_{k-1} et à $d - k$ sommets de S_{k+1} . Par conséquent, les probabilités de transition rapportées sur le graphe linéaire comportant $d + 1$ noeuds valent

$$(T_d)_{k'k} = p(k \rightarrow k') = \frac{k}{d} \delta_{k',k-1} + \frac{d-k}{d} \delta_{k',k+1}. \quad (1.94)$$

L'exercice 4 demandait de calculer la moyenne du premier temps de passage au noeud d en partant du noeud 0, que nous noterons $\langle \mathbf{m}_d \rangle_0$, mais on peut aussi bien s'intéresser à $\langle \mathbf{m}_d \rangle_k$ (départ du noeud $k < d$).

Pour calculer ces quantités, on utilisera (1.92) ou la relation de récurrence suivante (adaptée à la situation présente)

$$P_k[\mathbf{m}_d = N] = \sum_{k'} (T_d)_{k'k} P_{k'}[\mathbf{m}_d = N - 1], \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_k[\mathbf{m}_d = 0] = \delta_{k,d}, \\ P_d[\mathbf{m}_d = N] = \delta_{N,0}, \end{cases} \quad (1.95)$$

et on en tirera ensuite le système linéaire

$$\langle \mathbf{m}_d \rangle_k = 1 + \sum_{k' < d} (T_d)_{k'k} \langle \mathbf{m}_d \rangle_{k'}, \quad k < d. \quad (1.96)$$

Vérifier qu'en dimension $d = 4, 5, 6$ et 7 , le temps moyen $\langle \mathbf{m}_d \rangle_0$ vaut respectivement $\frac{64}{3}$, $\frac{128}{3}$, $\frac{416}{5}$ et $\frac{2416}{15}$, confirmer la valeur suivante en dimension 47 ,

$$\langle \mathbf{m}_d \rangle_{0, d=47} = \frac{42\,371\,436\,350\,940\,931\,526\,480\,650\,829\,824}{294\,362\,129\,962\,575\,675} = 1.44 \times 10^{14}. \quad (1.97)$$

Etablir finalement une formule aussi générale que possible pour $\langle \mathbf{m}_d \rangle_k$ en termes de $k < d$ et d . Montrer par exemple que $\langle \mathbf{m}_d \rangle_{d-1} = 2^d - 1$.

Marches aléatoires standards

6. Pour la marche standard en une dimension, calculer la valeur moyenne de la valeur absolue de la position. Montrer que $\langle |\omega(N)| \rangle$ satisfait la relation de récurrence

$$\langle |\omega(N)| \rangle = \begin{cases} \langle |\omega(N-1)| \rangle & \text{si } N > 0 \text{ est pair,} \\ \langle |\omega(N-1)| \rangle + P_0(0; N-1) & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases} \quad (1.98)$$

En déduire que pour tout N , $\langle |\omega(N)| \rangle = \langle \tau(0; N-1) \rangle$ est égal au temps moyen passé à l'origine. Vérifier ensuite que (la double factorielle est définie par $N!! = N(N-2)(N-4) \dots$, le produit s'arrêtant à 2 ou 1 suivant la parité de N)

$$\langle |\omega(N)| \rangle = \begin{cases} \frac{(N-1)!!}{(N-2)!!} & \text{si } N > 0 \text{ est pair,} \\ \frac{N!!}{(N-1)!!} & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases} \quad (1.99)$$

Montrer finalement que pour N très grand, on a

$$\langle |\omega(N)| \rangle = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} + \dots \quad (1.100)$$

7. Pour la marche standard en une dimension, utiliser les résultats de la section 1.4 pour montrer que

$$P_0[\mathbf{m}_b > N] = P_0[\max_{s \leq N} \omega(s) \leq b-1] = \sum_{x=-b}^{b-1} P_0(x; N), \quad (1.101)$$

et en déduire aussitôt que (assez curieusement !)

$$P_0[\max_{s \leq N} \omega(s) = b] = P_0(b; N) + P_0(b+1; N). \quad (1.102)$$

On notera qu'une seule des deux probabilités est non-nulle (une preuve directe de ce dernier résultat est possible en utilisant un principe de réflexion des trajectoires). Utiliser ensuite l'équation ci-dessus pour $P_0[\mathbf{m}_b > N]$ et l'expression exacte de $P_0(x; N)$ en une dimension pour obtenir

$$P_0[\mathbf{m}_b = N] = \frac{b}{2^N N} \binom{N}{\frac{N+b}{2}} \quad \text{pour } 0 < b \leq N \text{ et } N+b \text{ pair,} \quad (1.103)$$

et

$$P_0[\mathbf{m}_0 = N] = \frac{1}{2^{N-1}(N-1)} \binom{N-1}{\frac{N}{2}} \quad \text{pour } N \text{ pair.} \quad (1.104)$$

8. Généraliser les résultats de l'exercice précédent pour trouver la distribution du k -ème retour en 0:

$$P_0[\mathbf{m}_0^k = N] = \frac{k}{2^{N-k}(N-k)} \binom{N-k}{\frac{N}{2}} \quad \text{pour } N \text{ pair.} \quad (1.105)$$

Montrer enfin que la probabilité qu'il y ait exactement k retours en 0 en un temps N vaut

$$P_0[k \text{ retours en temps } N] = \frac{1}{2^{N-k}} \binom{N-k}{N/2}. \quad (0 \leq k \leq N/2) \quad (1.106)$$

9. Pour la marche aléatoire standard en une dimension, calculer la probabilité, que partant de l'origine, le marcheur atteint le site $-a \leq 0$ avant d'atteindre le site $b \geq 0$, i.e. la probabilité $P_0[\mathbf{m}_{-a} < \mathbf{m}_b]$ que le temps de premier passage en $-a$ soit inférieur au temps de premier passage en b . Montrer qu'elle est donnée par

$$P_0[\mathbf{m}_{-a} < \mathbf{m}_b] = \frac{b}{a+b}. \quad (1.107)$$

(Indication: considérer la probabilité $p_{x,n}$ que, partant du site x , le marcheur soit pour la première fois en $-a$ au temps n sans être passé par b , et montrer qu'elle satisfait la relation de récurrence $2p_{x,n} = p_{x-1,n-1} + p_{x+1,n-1}$.)

10. Montrer que l'identité (1.60) est une conséquence de la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m), \quad (1.108)$$

où \hat{f} est la transformée de Fourier de f , une fonction L^2 sur \mathbb{R} . L'application de cette formule requiert que la partie imaginaire de τ soit strictement positive. Donner ensuite une preuve de la formule de Poisson.

(Indication pour la formule de Poisson: considérer la fonction $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ et la développer en série de Fourier.)

11. Pour des grandes valeurs de N , montrer que la probabilité, pour la marche standard en d dimensions, d'un retour au point de départ au temps N décroît comme $N^{-d/2}$. En déduire que la moyenne du temps local $\langle \tau(0, N) \rangle$ diverge comme \sqrt{N} en 1 dimension et comme $\log N$ en 2 dimensions.

12. En d dimensions, soit $P_0[\mathbf{m}_{\vec{b}} = N]$ la probabilité que le marcheur soit pour la première fois en \vec{b} au temps N (départ de l'origine). Calculer sa fonction génératrice $Q_1(\vec{b}, \lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N P_0[\mathbf{m}_{\vec{b}} = N]$ et montrer qu'elle s'exprime par

$$Q_1(\vec{0}, \lambda) = 1 - \frac{1}{G(\vec{0}, \lambda)}, \quad Q_1(\vec{b}, \lambda) = \frac{G(\vec{b}, \lambda)}{G(\vec{0}, \lambda)} \quad \text{pour } \vec{b} \neq \vec{0}, \quad (1.109)$$

où la fonction

$$G(\vec{b}, \lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N P_0(\vec{b}; N) = d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{b}}}{d - \lambda \sum_i \cos \varphi_i} \quad (1.110)$$

est la fonction génératrice de la distribution de position.

Montrer qu'en une dimension,

$$Q_1(0, \lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad Q_1(b, \lambda) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \right)^{|b|}, \quad (1.111)$$

et comparer avec les résultats de l'exercice 8. En déduire que le temps d'attente moyen $\langle \mathbf{m}_b \rangle$ avant le premier passage en n'importe quel site b est infini, malgré la certitude du passage en b .

En deux dimensions et pour $\vec{b} = 0$, une des deux intégrations donnant $G(0, \lambda)$ peut être effectuée par le théorème des résidus et donne

$$Q_1(0, \lambda) = 1 - \frac{\pi}{2K(\lambda)}, \quad \text{avec } K(\lambda) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (1.112)$$

13. Utiliser les résultats de l'exercice précédent et le théorème taubérien pour les séries pour montrer que la probabilité d'un premier retour à l'origine au temps N décroît, pour N grand (et pair), comme

$$P_0[\mathbf{m}_0 = N] \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{N^{3/2}}, \quad P_0[\mathbf{m}_0 = N] \simeq \frac{2\pi}{N \log^2 N}, \quad (1.113)$$

respectivement en une et deux dimensions.

14. Pour la marche standard en une dimension, calculer la probabilité que sur un temps $2N$, le temps de dernier retour en zéro se produise au temps $2k$. Montrer qu'elle est égale à la probabilité $p_{2N}(2k)$ de passer la fraction de temps $\frac{k}{N}$ sur l'axe positif, donnée explicitement en (1.78), ce qui donne une seconde interprétation de la loi de l'arcsinus (appelée seconde loi de l'arcsinus).

15. Considérer la marche standard en deux dimensions sur le réseau \mathbb{Z}^2 . Soit D_n la probabilité que son premier passage sur la diagonale se fasse au site $\vec{x} = (n, n)$. Montrer que la fonction génératrice des D_n est donnée par

$$D(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} D_n e^{i\theta n} = 1 - \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|. \quad (1.114)$$

En déduire que $D_0 = 1 - \frac{2}{\pi}$ et $D_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(4n^2-1)}$ pour $n \neq 0$.

(Indication: considérer les deux variables aléatoires définies comme la somme et la différence des deux composantes cartésiennes de la marche bidimensionnelle. Observer ensuite que ces deux variables sont indépendantes et égales en fait à deux marches unidimensionnelles.)

16. Soient deux marcheurs aléatoires standards unidimensionnels et indépendants. Vérifier que la probabilité I_N qu'ils se rencontrent (occupent le même site) pour la première fois au temps N est donnée par la fonction génératrice

$$I(\lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} I_N \lambda^N = 1 - \sqrt{1 - \lambda}. \quad (1.115)$$

En conclure que la probabilité que les deux marches s'intersectent vaut 1. Utiliser à nouveau le théorème taubérien pour montrer que $I_N \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}N^{3/2}}$.

(Indication: s'inspirer de l'exercice précédent pour formuler le problème en termes d'une marche bidimensionnelle.)

Marches aléatoires quasi-standards

17. Calculer la distribution de probabilité donnant la position dans le cas d'une marche aléatoire asymétrique sur \mathbb{Z}^d , définie par les probabilités de transition

$$\text{prob}(x \rightarrow y) = p \sum_{i=1}^d \delta_{y, x-e_i} + q \sum_{i=1}^d \delta_{y, x+e_i} \quad p + q = \frac{1}{d}. \quad (1.116)$$

18. Considérer une marche aléatoire bidimensionnelle sur un réseau triangulaire. Chaque site possède six voisins, situés aux six racines sixièmes de l'unité, et les probabilités de transition de la marche sont égales à $\frac{1}{6}$ de sauter sur un site voisin, et 0 sinon. Obtenir la distribution de position du marcheur

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{3^N} \int_{\text{Hex}} \frac{d^2k}{2\sqrt{3}\pi^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left(\cos \frac{3k_1}{2} + \cos \frac{3k_2}{2} + \cos \frac{3(k_1 + k_2)}{2} \right)^N, \quad (1.117)$$

où le domaine d'intégration Hex est un domaine hexagonal approprié.

19. Considérer la marche aléatoire en une dimension définie de la façon suivante: le marcheur se déplace sur les sites du réseau infini \mathbb{Z} avec égale probabilité $\frac{1}{3}$ de faire un saut vers la gauche, un saut vers la droite ou de rester là où il est. Calculer la distribution de position $P_0(x; N)$ pour cette marche. Comment les propriétés examinées dans le texte pour la marche aléatoire standard vont-elles être modifiées ? Le comportement diffusif (i.e. $\langle \omega^2(N) \rangle \sim N$) est-il préservé ? La marche sera-t-elle encore récurrente ?

20. (D'après A. Comtet et S. Majumdar, *Precise asymptotics for a random walker's maximum*, cond-mat/0506195)

On considère ici une marche continue, sur \mathbb{R} , mais à temps discret. Le marcheur effectue un saut à chaque seconde, mais le saut, au lieu d'être la variable aléatoire valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ comme dans la marche standard, est une variable pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle x , positive ou négative, dont la distribution est spécifiée par la fonction de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (et donc, la probabilité que le marcheur fasse un bond compris dans l'intervalle $[x, x + dx]$ est égale à $f(x)$). Comme auparavant, tous les sauts sont indépendants et identiquement distribués.

Montrer que la distribution de position du marcheur au temps N est donnée par

$$P_0(x; N) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\cos kx}{(k^2 + 1)^N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(N-1)!} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{N-\frac{1}{2}} K_{N-\frac{1}{2}}(|x|), \quad (1.118)$$

en termes des fonctions de Bessel d'indice demi-entier (qui sont des fonctions élémentaires). Calculer $\langle x^2(N) \rangle = 2N$, et montrer que la marche est récurrente.

Marches aléatoires non-standard

21. (P. Krapivsky et S. Redner, *Random walk with shrinking steps*, physics/0304036)

On modifie la marche aléatoire standard en une dimension en décidant que le marcheur effectue des sauts dont la longueur est à chaque fois réduite de moitié. Le premier saut est de longueur 1 vers la gauche ou vers la droite, le deuxième saut est de longueur $1/2$ vers la gauche ou vers la droite, ... Montrer que la distribution de position au temps N est donnée par

$$P_0(x; N) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\sin 2k}{2^{N+1} \sin \frac{k}{2^N}}, \quad (1.119)$$

et que la marche n'est pas récurrente. Calculer que la probabilité d'un retour en 0 est nulle, $P_0(0; N) = 0$, et expliquer pourquoi. Montrer que lorsque N tend vers l'infini, $P_0(x; N)$ tend vers la distribution uniforme sur l'intervalle $[-2, 2]$.

22. Considérer la marche aléatoire sur \mathbb{Z} obtenue de la marche standard en deux dimensions en ne la regardant que lorsqu'elle passe par la diagonale (une section de Poincaré). Les probabilités de transition (par unité de temps) sont données par les nombres D_n de l'exercice 15. Cette marche est-elle récurrente ou transiente ?

(Cet exemple de marche est un cas particulier des marches aléatoires de Riemann (en 1

dimension), dans lesquelles le marcheur peut sauter de n'importe quel site à n'importe quel autre, la probabilité d'un saut de longueur n (vers la gauche ou vers la droite) étant proportionnelle à $n^{-(1+\alpha)}$, avec $\alpha > 0$. Pour $\alpha \leq 2$, ces marches ont la particularité que l'écart-type des variables de saut est infini. Voir Gillis et Weiss, *J. Math. Phys.* 11 (1970) 1307, ou la contribution de Hughes dans *The Mathematics and Physics of Disordered Media*, Springer LNM 1035, ou encore le livre de Hughes.)

23. Pour la même marche qu'à l'exercice précédent, définie par les probabilités de saut D_n de l'exercice 15, on cherche la probabilité $R_N \equiv P_0(0; N)$ d'un retour à l'origine au temps N . Montrer que cette probabilité satisfait la récurrence $R_N = (2 - \frac{1}{N}) R_{N-1} - \frac{2}{\pi N}$. En déduire la forme asymptotique $R_N \sim \frac{2}{\pi N}$ pour N grand.
24. En deux dimensions, on considère une marche aléatoire avec mémoire à court terme (ordre 1): à chaque instant, le marcheur effectue un saut vers l'un des trois sites voisins où il ne se trouvait pas à l'instant juste précédent, les trois sauts étant équiprobables (le marcheur refuse de resauter sur le site dont il vient l'instant d'avant; autrement dit, on doit avoir $\vec{x}(t+2) \neq \vec{x}(t)$ pour tout t). A l'instant initial, les quatre sauts vers les quatre sites voisins de l'origine (disons) sont équiprobables. Dénotons par $P_{N,E,S,W}(\vec{x}; N)$ la probabilité d'être en \vec{x} au temps N en venant du Nord, de l'Est, du Sud ou de l'Ouest, et par $P_{N,E,S,W}(\vec{\varphi}; N) = \sum_{\vec{x}} \frac{e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\varphi}}}{2\pi} P_{N,E,S,W}(\vec{x}; N)$ les transformées de Fourier.

Montrer que ces dernières sont données par

$$\begin{pmatrix} P_N(\vec{\varphi}; N) \\ P_E(\vec{\varphi}; N) \\ P_S(\vec{\varphi}; N) \\ P_W(\vec{\varphi}; N) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi} A^{N-1} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} \\ e^{i\varphi_1} \\ e^{-i\varphi_2} \\ e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad (1.120)$$

où la matrice A est égale à

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} & e^{i\varphi_2} & 0 & e^{i\varphi_2} \\ e^{i\varphi_1} & e^{i\varphi_1} & e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} & e^{-i\varphi_1} & e^{-i\varphi_1} \\ e^{-i\varphi_2} & 0 & e^{-i\varphi_2} & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}. \quad (1.121)$$

Calculer ensuite la variance de la distribution de position

$$\langle |\vec{x}|^2 \rangle = 2N + \frac{3}{2} + \dots \quad (1.122)$$

qui montre que cette marche possède une constante de diffusion deux fois plus grande que la marche standard symétrique ($\langle |\vec{x}|^2 \rangle = N$).

(Indication: pour le calcul de la variance, observer que $\langle |\vec{x}|^2 \rangle = \langle x_1^2 + x_2^2 \rangle = 2\langle x_1^2 \rangle = -4\pi \partial_{\varphi_1}^2 P((\varphi_1, 0); N) \Big|_{\varphi_1=0}$ avec $P(\vec{\varphi}; N)$ la transformée de Fourier de la distribution de position $P(\vec{x}; N)$ (sans restriction de provenance). Utiliser ensuite l'expression matricielle ci-dessus ou des méthodes spectrales.)

MOUVEMENT BROWNIEN

Il existe plusieurs (bonnes) raisons pour discuter les marches aléatoires continues. Il y a bien sûr le fait qu'elles constituent une alternative bien naturelle aux marches discrètes, tout comme le feraient les marches continues à temps discret, les marches discrètes à temps continu, ...

Les motivations qui nous concernent plus directement sont basées sur les affirmations suivantes:

Le régime asymptotique —le seul qui soit réellement intéressant— d'une marche discrète peut être décrit par une marche continue associée, qui capture ainsi les caractéristiques significatives de la version discrète et en oublie les détails du régime intermédiaire (petits temps, petites distances).

De façon un tout petit peu plus précise, les marches continues peuvent se voir comme certaines limites des marches discrètes; de ce fait, elles extraient les caractéristiques essentielles des marches discrètes en les dépouillant des détails ou complications qui ne sont pas pertinents pour leur comportement asymptotique.

Peut-être encore un peu obscures pour le moment, ces affirmations sont contenues dans l'idée de "limite du continu" ou "limite d'échelle", et s'éclairciront par la suite. Elles nous conduiront directement aux propriétés d'universalité, par lesquelles des marches discrètes distinctes partagent le même régime asymptotique, parce que leur limite du continu respective mène à une unique marche continue.

D'autre part, pour la marche aléatoire standard sur \mathbb{Z}^d , la limite du continu définit le mouvement brownien standard d -dimensionnel sur \mathbb{R}^d , et présente une analogie frappante avec la formulation en intégrale de chemins de la mécanique quantique (à la Feynman).

2.1 LIMITE DU CONTINU DE LA MARCHE STANDARD

On a donné plusieurs expressions pour la distribution $P_0(\vec{m}; N)$ de position de la marche standard sur \mathbb{Z}^d . La limite du continu de cette distribution fournira le résultat analogue sur l'espace \mathbb{R}^d , c'est-à-dire pour une marche continue.

Il y a plusieurs façons de procéder, mais l'une d'entre elles, sans doute la plus intuitive, est de réaliser \mathbb{R}^d comme la limite de $a\mathbb{Z}^d$ pour $a \rightarrow 0$, c'est-à-dire un réseau de pas a , dont les mailles deviennent de plus en plus petites. C'est cette voie que nous suivrons. C'est aussi celle qui met le mieux en évidence le fait que la limite du continu correspond au régime asymptotique de la marche discrète.

Que l'on soit sur \mathbb{Z}^d ou $a\mathbb{Z}^d$ ne change strictement rien dans la définition de la marche

aléatoire. En effet, seules les probabilités de transition comptaient, et elles ne dépendaient que de la notion “être plus proche voisin”, et non pas de la distance à parcourir pour effectuer le saut.

Par conséquent, pour $\vec{x} \in a\mathbb{Z}^d$, la probabilité d’être en \vec{x} au temps N ne dépend de \vec{x} qu’à travers l’entier $\vec{m} = \frac{\vec{x}}{a}$, pour lequel les formules du chapitre 1 s’appliquent.

On en tire simplement, par la formule de transformée de Fourier, que

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}/a} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i\right)^N, \quad \text{pour } x \in a\mathbb{Z}^d. \quad (2.1)$$

L’introduction du pas a est un peu triviale pour le moment, mais permet en tout cas d’introduire un point de $a\mathbb{Z}^d$, supposé tendre plus tard vers un point de \mathbb{R}^d .

Par simple changement de variable, la probabilité ci-dessus se réécrit

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos ak_i\right)^N. \quad (2.2)$$

Lorsque a tend vers 0, deux choses se passent. D’abord le domaine d’intégration tend vers \mathbb{R}^d (les coefficients de Fourier tendent vers la transformée de Fourier). Ensuite, on peut approximer la somme des cosinus par $\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos ak_i \sim e^{-a^2|k|^2/2d}$.

On a donc, à l’ordre dominant en a , l’expression

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = a^d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} e^{-Na^2|k|^2/2d}. \quad (2.3)$$

Sa limite doit nous fournir la probabilité dans le continu. Nous définissons donc, de façon tout à fait naïve,

$$P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; N) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_0^{\text{disc}}\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right), \quad (2.4)$$

où la probabilité dans le discret du membre de droite suppose que $\frac{\vec{x}}{a}$ appartient à \mathbb{Z}^d . L’inclusion de facteur a^{-d} est simplement dictée par la nécessité d’obtenir une limite non-triviale: pour tout a strictement positif, l’intégrale (2.3) converge et la limite donnerait identiquement 0 à cause du préfacteur a^d . Le facteur a^{-d} implique aussi que la limite du continu nous fera passer d’une probabilité à une densité de probabilité, puisqu’on divise par un élément de volume.

Malgré cette précaution, la limite reste désespérément triviale: on trouve simplement que $P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; N) = \delta(\vec{x})$, c’est-à-dire que dans la limite continue, le marcheur reste sur place avec probabilité 1 !

Il peut être surprenant, mais ce résultat se comprend facilement. Voyant \vec{x} comme un vecteur réel fixé, la relation $\vec{x} = a\vec{m}$ avec a tendant vers zéro implique que la norme de

\vec{m} doit tendre vers l'infini. Comme N reste fixe, $P_0^{\text{disc}}(\vec{m}; N)$ est la probabilité d'aller de 0 à un site \vec{m} arbitrairement éloigné en un temps fixé N , probabilité qui est bien entendu nulle. Uniquement pour \vec{x} lui-même nul, le site \vec{m} peut rester à distance finie, et dans ce cas $P_0^{\text{disc}}(\vec{m}; N) \neq 0$ implique que $P_0^{\text{cont}}(\vec{0}; N) \neq 0$ et vaut nécessairement l'infini ($\delta(0)$) par normalisation. Autrement dit, on n'a pas laissé au marcheur suffisamment de temps pour atteindre le site \vec{m} arbitrairement éloigné.

Notre limite naïve est donc légitime et correcte mais triviale et inintéressante. La discussion ci-dessus montre bien que l'on ne pourra obtenir une limite non-triviale qu'à la seule condition d'ajuster le temps N en fonction de a , de sorte que, tout comme \vec{m} , N diverge lorsque a tend vers 0. On doit laisser au marcheur suffisamment de temps pour atteindre le site $\frac{\vec{x}}{a}$.

Reste à savoir ce que "suffisamment" de temps veut dire. A quelle vitesse est-ce que N doit diverger en fonction de a ? Le site $\frac{\vec{x}}{a}$ à atteindre est éloigné d'une distance qui diverge comme a^{-1} . On sait qu'il faut un temps de l'ordre de $|\vec{m}|^2$ pour s'éloigner d'une distance $|\vec{m}|$, et on peut dès lors penser que la limite du continu sera non-triviale si le temps N est ajusté en fonction de l'échelle a de telle sorte qu'il diverge comme a^{-2} .

Afin de vérifier ce raisonnement, laissons ouverte la question de la vitesse de divergence de N en fonction de a et posons $N = \frac{Dt}{a^{1/\nu}}$ pour un certain exposant $\nu > 0$ à déterminer. D est une constante de proportionnalité qui fixe l'échelle des temps t . Remarquons que pour N entier et $a \rightarrow 0$, la variable temporelle t devient continue.

Nous modifions donc notre première définition de limite en posant cette fois

$$P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_0^{\text{disc}}\left(\frac{\vec{x}}{a}; \frac{Dt}{a^{1/\nu}}\right) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} e^{-Dta^{2-1/\nu} |k|^2 / 2d}. \quad (2.5)$$

Le cas $\nu = \infty$ a été discuté plus haut, mais plus généralement, et pour les mêmes raisons, une valeur $\nu > \frac{1}{2}$ amène la même distribution triviale $\delta(x)$. Ces valeurs de ν correspondent effectivement à la situation où l'on ne donne pas assez de temps au marcheur: N ne diverge pas assez vite.

Si au contraire $\nu < \frac{1}{2}$, la limite de l'exponentielle est nulle sauf si $k = 0$, et est donc proportionnelle à $\delta(k)$. L'intégrale sur k donne simplement une distribution uniforme (sur \mathbb{R}^d), et donc nécessairement nulle. Dans ce cas, on a donné trop de temps au marcheur, ce qui lui a permis d'aller n'importe où sur le réseau \mathbb{Z}^d , et donc n'importe où sur \mathbb{R}^d .

La seule façon d'obtenir une limite non-triviale est donc effectivement de mettre $\nu = \frac{1}{2}$, donnant au marcheur juste le temps nécessaire pour aller à une distance $\mathcal{O}(1/a)$ sur \mathbb{Z}^d ou $\mathcal{O}(1)$ sur \mathbb{R}^d .

La limite donne alors, après l'intégration gaussienne,

$$P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_0^{\text{disc}}\left(\frac{\vec{x}}{a}; \frac{Dt}{a^2}\right) = \frac{1}{(2\pi Dt/d)^{d/2}} e^{-d|\vec{x}|^2 / 2Dt}. \quad (2.6)$$

La quantité $P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; t)$ est une densité de probabilité, que l'on peut vérifier être correctement normalisée. La mesure de probabilité correspondante, $P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; t) d^d x$ donne la

probabilité d'être en un point de l'élément de volume $d^d x$ au temps t , en étant parti de l'origine au temps initial $t = 0$ (on vérifie aisément que $P_0^{\text{cont}}(\vec{x}; 0) = \delta(x)$). Tout comme dans les marches discrètes, on verra \vec{x} comme une position le long d'une trajectoire continue, que l'on denotera par $\omega(t)$, $t \geq 0$. Pour t fixé, $\omega(t)$ est une variable aléatoire, à valeurs dans \mathbb{R}^d , et de densité (en laissant désormais tomber le "cont")

$$P_0(\omega(t) \in d^d x) = P_0(\vec{x}; t) d^d x = \frac{1}{(2\pi Dt/d)^{\frac{d}{2}}} e^{-d|x|^2/2Dt} d^d x. \quad (2.7)$$

Cette mesure peut également être obtenue comme solution élémentaire de l'équation de la chaleur, que l'on établit en calculant la limite du continu de l'une des deux équations différentielles discrètes du chapitre 1. On se souvient que l'une incluait une variation du point d'arrivée, et l'autre une variation du point de départ. On trouve dans les deux cas que la densité $P_{\vec{y}}(\vec{x}; t)$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{D}{2d} \Delta_x P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{D}{2d} \Delta_y P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) \end{cases} \quad \text{et} \quad P_{\vec{y}}(\vec{x}; 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.8)$$

avec $\Delta = \sum_i \partial_i^2$ le laplacien habituel.

Une troisième méthode, basée sur les moments de la distribution discrète, est proposée en exercice. C'est parfois celle qui est la plus facile à mettre en oeuvre dans des situations plus difficiles (mais plus fréquentes !).

Le processus de limite développé ci-dessus est représentatif du calcul de la limite du continu d'un système discret. On l'appelle aussi limite d'échelle (scaling limit), une dénomination qui exprime bien l'idée sous-jacente de faire un zoom arrière (facteur d'échelle $a < 1$). En termes de l'échelle a , qui est véritablement le paramètre contrôlant la limite, les variables discrètes (\vec{m} et N) doivent être finement ajustées sous peine d'obtenir une limite triviale: il y a un ajustement critique des variables (ni trop ni trop peu), spécifié par des exposants critiques. Dans le cas présent, l'ajustement est contrôlé par l'exposant $\nu = \frac{1}{2}$, et la relation est $|\vec{m}| = |\frac{\vec{x}}{a}| \sim (\frac{tD}{a^{1/\nu}})^\nu \sim N^\nu$. La valeur de cet exposant est clairement liée aux propriétés diffusives de la marche discrète, dont la marche continue hérite. De façon plus générale, tous les paramètres présents dans le système discret devront être ajustés (scalés !) de manière adéquate pour obtenir une limite d'échelle non triviale. Des exemples seront donnés plus loin.

Les relations $\vec{m} = \frac{\vec{x}}{a}$ et $N = \frac{Dt}{a^2}$ entre les variables discrètes et continues montrent bien que ce sont les régimes de grandes distances $\vec{m} \rightarrow \infty$ et de grands temps $N \rightarrow \infty$ qui définissent la limite d'échelle. On se trouve donc bien dans le régime asymptotique des marches discrètes, comme annoncé au début du chapitre. Du reste, l'idée de faire un zoom arrière, de prendre du recul, qui est bien l'idée maîtresse de la limite d'échelle, explique parfaitement pourquoi le régime asymptotique de la marche standard est une marche continue, dans le temps et dans l'espace. Cette marche continue s'appelle le mouvement brownien (standard).

Les distributions continues, browniennes $P_0(\vec{x}; t)$ gardent une trace claire de la limite

d'échelle dont elle est issue, puisqu'elles satisfont la relation d'échelle:

$$P_0(\vec{x}; t) = b^d P_0(b\vec{x}; b^2 t) \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}_+. \quad (2.9)$$

La facteur b^d dans le membre de droite est dû à la nature de P_0 comme densité de probabilité. Les probabilités elle-mêmes sont invariantes sous changement d'échelle:

$$P_0(\vec{x}; t) d^d x = P_0(b\vec{x}; b^2 t) d^d (bx) \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}_+. \quad (2.10)$$

De façon équivalente, on peut dire que les trajectoires $\omega(t)$ et $\frac{1}{b}\omega(b^2 t)$ ont même distribution.

Pour résumer, la limite d'échelle nous a conduit d'un processus discret à un processus continu, le mouvement brownien, dont nous avons calculé les distributions de position. Elle préserve les propriétés P1–P3 dont jouissaient les marches discrètes, à savoir l'homogénéité dans l'espace, la propriété de Markov et l'équation de Chapman–Kolmogorov (voir section 1.2). On a donc

$$P_{\vec{y}}(\omega(t) \in d^d x) = P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) d^d x = P_0(\vec{x} - \vec{y}; t) d^d x. \quad (2.11)$$

La propriété de Markov exprime l'indépendance des morceaux disjoints de la marche

$$P_{\vec{y}}(\omega(t) \in d^d x | B_s) = P_{\omega(s)}(\omega(t - s) \in d^d x), \quad s \leq t, \quad (2.12)$$

où B_s représente tout le passé de la marche antérieur au temps s : la seule influence du passé sur le futur, c'est la position à l'instant présent. L'équation de Chapman–Kolmogorov est une conséquence de la propriété de Markov:

$$P_{\vec{y}}(\omega(t) \in d^d x) = \int P_{\vec{y}}(\omega(s) \in d^d z) P_z(\omega(t - s) \in d^d x), \quad s \leq t, \quad (2.13)$$

$$\iff P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \int d^d z P_{\vec{y}}(\vec{z}; s) P_{\vec{z}}(\vec{x}; t - s). \quad (2.14)$$

2.2 THÉORÈME CENTRAL LIMITE

La section précédente a détaillé le calcul de la limite du continu des marches aléatoires standards sur \mathbb{Z}^d . On l'a volontairement fait de façon extrêmement détaillée pour bien comprendre le principe de l'idée sous-jacente, et se rendre compte de la manière dont elle fonctionne.

Ayant compris le principe, il est hautement instructif de se repencher sur ce calcul pour s'apercevoir d'une propriété remarquable de la distribution continue que l'on a trouvée, à savoir qu'elle est universelle ! Quelle que soit la marche aléatoire discrète que l'on considère au départ, tout au moins dans une très large classe, la limite du continu donne toujours les mêmes distributions continues. Ce sera notre premier résultat d'universalité.

On peut considérer par exemple la classe des marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d définies en termes de sauts \vec{s}_i indépendants et identiquement distribués, de sorte que la position du marcheur à l'instant N soit $\vec{\omega}(N) = \vec{s}_1 + \dots + \vec{s}_N$. On suppose que la moyenne de la distribution de saut \vec{s} est nulle (on peut le supposer, après soustraction adéquate), et que sa matrice de covariance $\langle s^i s^j \rangle = \frac{\sigma}{a} \delta_{i,j}$ des composantes de \vec{s} soit un multiple fini de l'identité (l'hypothèse importante est que σ soit fini).

Dans ces conditions, on trouve à nouveau $\langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\omega}(N)} \rangle = \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{s}} \rangle^N$, et l'équation (2.2) de la section précédente devient

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} \langle e^{ia\vec{k} \cdot \vec{s}} \rangle^N. \quad (2.15)$$

Dès lors, pour a petit, on a $\langle e^{ia\vec{k} \cdot \vec{s}} \rangle = 1 - \frac{a^2 |\vec{k}|^2 \sigma}{2d} + \dots \sim e^{-a^2 |\vec{k}|^2 \sigma / 2d}$, et on retrouve exactement la même forme que pour la marche standard, à un facteur σ près dans l'exponentielle. Par conséquent, la distribution continue est exactement la même, à part que la constante D , ou de façon équivalente, la variable temporelle t , se trouve multipliée par σ .

On obtient le résultat étonnant que toutes les marches discrètes de la classe définie plus haut possède la même limite du continu, et donc le même régime asymptotique, à un changement d'échelle du temps près. Pour toutes ces marches, le régime asymptotique est universel: on dira que toutes ces marches sont dans la même classe d'universalité ².

Notons finalement que ce que l'on a fait ici n'est qu'une reformulation du théorème central limite, que nous verrons dans le cadre de ce cours comme un résultat d'universalité.

Soit X_1, X_2, \dots des variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et de variance σ . Alors la distribution de la somme $S_N = (X_1 + X_2 + \dots + X_N)/\sqrt{N}$ tend vers une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance σ , dont la fonction de densité s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}. \quad (2.16)$$

La relation avec les calculs qui précèdent, en $d = 1$ au moins, est immédiate.

2.3 MESURE DE WIENER

Dans la pratique, les distributions de position à temps fixé $P_{\vec{y}}(\vec{x}; t)$ se révèlent insuffisantes. Telles quelles, elles ne permettent de sonder les trajectoires browniennes qu'à des temps isolés, et pas sur des intervalles de temps (comment calculer la fraction de temps passé dans une boule, par exemple).

Néanmoins les distributions de position à temps fixés, conjuguées à la propriété de Markov, déterminent un unique processus aléatoire (stochastique), défini en termes d'une

²Cette classe d'universalité, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les marches aléatoires qui partagent ce régime asymptotique, est beaucoup plus grande encore que la classe considérée ici.

unique mesure de probabilité sur l'ensemble des trajectoires browniennes. La mesure en question s'appelle la mesure de Wiener.

Les trajectoires formant un ensemble non-dénombrable, on ne peut pas leur assigner une probabilité, et pour donner sens à une fonction de densité, il nous faudrait définir une mesure sur un ensemble de trajectoires. L'idée est donc de définir la mesure de Wiener de façon indirecte, en disant ce qu'elle donne lorsqu'on l'intègre sur des ensembles de trajectoires convenablement choisis³. Les ensembles types que l'on choisit sont des cylindres, définis par des fenêtres (ou des cubes en d dimensions).

En utilisant les distributions de position à des instants fixés et la propriété de Markov, on peut donner la probabilité des trajectoires ω qui passent dans les fenêtres I_1, I_2, \dots aux temps, t_1, t_2, \dots ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y[\omega : \omega(t_1) - y \in I_1, \omega(t_2) - \omega(t_1) \in I_2, \omega(t_3) - \omega(t_2) \in I_2, \dots] \\
&= \int_{\substack{x_1 - y \in I_1 \\ x_2 - x_1 \in I_2 \\ \dots}} P_y(\omega(t_1) \in d^d x_1) P_{x_1}(\omega(t_2) \in d^d x_2) P_{x_2}(\omega(t_3) \in d^d x_3) \dots \\
&= \int_{\substack{z_1 \in I_1 \\ z_2 \in I_2 \\ \dots}} P_0(\omega(t_1) \in d^d z_1) P_0(\omega(t_2 - t_1) \in d^d z_2) P_0(\omega(t_3 - t_2) \in d^d z_3) \dots \\
&= P_0(\omega(t_1) \in I_1) P_0(\omega(t_2 - t_1) \in I_2) P_0(\omega(t_3 - t_2) \in I_3) \dots \tag{2.17}
\end{aligned}$$

En multipliant les fenêtres et en les rendant aussi étroites que l'on veut, on peut raffiner arbitrairement bien l'ensemble des trajectoires dont on souhaite calculer la probabilité, et le coincer dans un cylindre aussi finement que l'on souhaite. On peut montrer que les probabilités de ces ensembles cylindriques définissent une unique mesure de probabilité \mathbb{P}_y sur l'ensemble des trajectoires. \mathbb{P}_y est la mesure de Wiener (et \mathbb{E}_y sera l'espérance associée).

Clairement la mesure de Wiener satisfait la propriété de Markov

$$\mathbb{P}_y[\omega(t) : s \leq t \leq T \mid \omega(\tau) : \tau \leq s] = \mathbb{P}_{\omega(s)}[\omega(t) : 0 \leq t \leq T - s]. \tag{2.18}$$

Dans tout ce qui suit et qui concerne le mouvement brownien, nous fixerons l'échelle des temps t en choisissant la constante de proportionnalité $D = d$, ce qui a l'avantage de simplifier les distributions de position. Celles-ci seront donc données par

$$P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{2t}} \iff \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{1}{2} \Delta_x P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{1}{2} \Delta_y P_{\vec{y}}(\vec{x}; t), \\ P_{\vec{y}}(\vec{x}; 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{cases} \tag{2.19}$$

Nous abandonnerons aussi la distinction de notation entre \mathbb{P}_y et P_y , puisqu'il n'y a aucune ambiguïté quant à celle qu'il faut utiliser: dans tous les cas, il s'agit de la mesure de Wiener

³C'est exactement comme si on définissait la mesure de Lebesgue sur la droite réelle en donnant la mesure (de Lebesgue) de tous les intervalles de \mathbb{R} .

\mathbb{P}_y , qui se réduit simplement à (un produit de) P_y lorsque l'événement à mesurer concerne les positions à des temps fixés.

2.4 MÉTHODE DES IMAGES

Afin de se familiariser avec les marches continues, et pour se convaincre —si cela était encore nécessaire—qu'elles reproduisent bien le régime asymptotique des marches discrètes, reconsidérons le problème du maximum de la marche en une dimension.

Un calcul plus simple mais qui repose sur le même principe, est celui de la distribution du premier temps de passage en un point (en exercice pour les marches discrètes). Commençons par celui-là, dans lequel on cherche à déterminer la probabilité que le marcheur (continu) n'ait pas atteint le point $b \geq 0$ au temps t ,

$$P_0[\mathbf{m}_b > t] \equiv P_0[\omega(s) < b, s \leq t]. \quad (2.20)$$

Pour résoudre ce problème dans le cas de la marche discrète, on pouvait casser le lien reliant les sites $b-1$ et b , c'est-à-dire effectivement travailler sur le graphe $\mathbb{Z} \cap]-\infty, b-1]$, tout en maintenant les probabilités de saut intactes: probabilité $1/2$ de sauter sur un site voisin accessible (avec lequel un lien existe). En particulier, étant arrivé en $b-1$, le marcheur garde une probabilité $1/2$ de sauter en $b-2$, et une probabilité $1/2$ de sauter en b , bien que les trajectoires pour lesquelles ce second choix est fait sont automatiquement écartées par la matrice d'incidence du graphe. Les probabilités de saut étant intactes, il s'ensuit que la probabilité $P_0[x; N \text{ et } \mathbf{m}_b > N]$ d'être en x au temps N en n'étant pas encore passé par b , satisfait l'équation de la chaleur discrète (elle traduit la probabilité $1/2$ de saut vers un site voisin), avec la condition initiale $P_0[x; 0 \text{ et } \mathbf{m}_b > 0] = \delta_{x,0}$ (la marche démarre en 0), et la condition frontière $P_0[b; N \text{ et } \mathbf{m}_b > N] = 0$ (qui assure que le marcheur ne passe pas en b , puisque le lien menant à b est coupé).

Le même principe est applicable aux marches continues. La densité de probabilité $f(x; t) \equiv P_0[x; t \text{ et } \mathbf{m}_b > t]$ devra satisfaire l'équation de la chaleur avec la condition initiale habituelle (puisque la marche se déroule tout à fait normalement), la condition $\mathbf{m}_b > t$ se traduisant par la condition frontière $P_0[b; t \text{ et } \mathbf{m}_b > t] = 0$.

On recherche par conséquent la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t f(x; t) = \frac{1}{2} \partial_x^2 f(x; t) \\ f(x; 0) = \delta(x), \quad f(b; t) = 0, \end{cases} \quad (x \leq b), \quad (2.21)$$

en termes de laquelle la probabilité recherchée sera donnée par

$$P_0[\mathbf{m}_b > t] = \int_{-\infty}^b dx f(x; t). \quad (2.22)$$

L'équation différentielle à résoudre est linéaire, avec des coefficients indépendants de x , ce qui implique que n'importe quelle translatée $f(x-y; t)$ satisfait l'expression différentielle

si $f(x; t)$ la satisfait. On met cette observation à profit en vérifiant que

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-x^2/2t} - e^{-(x-2b)^2/2t} \right\} \quad (2.23)$$

est bien solution du problème. Le premier terme est la mesure de Wiener, qui a toutes les bonnes propriétés sauf celle de s'annuler en $x = b$. Le deuxième terme, un translaté du premier, garantit la condition frontière. Ce deuxième terme produit, à $t = 0$, une distribution $\delta(x - 2b)$, mais dont la contribution est nulle dans le domaine d'intérêt. Si on désigne le premier terme par $f_0(x; t)$, on peut encore écrire que $f(x; t) = f_0(x; t) - f_0(2b - x; t)$, ce qui met en évidence le fait que le second terme est obtenu du premier par "réflexion" par un plan miroir placé en b ⁴.

On en déduit la probabilité que le premier passage en b se fasse après le temps t :

$$P_0[\mathbf{m}_b > t] = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^b dx e^{-x^2/2t}. \quad (2.24)$$

On vérifiera les comportements limites attendus, c'est-à-dire $\lim_{b \rightarrow 0} P_0[\mathbf{m}_b > t] = 0$ et $\lim_{b \rightarrow \infty} P_0[\mathbf{m}_b > t] = 1$. On fera également la comparaison de ce résultat avec celui du cas discret (exercice).

La même méthode fonctionne pour la distribution du maximum de la (norme de la) marche:

$$P_0[|\omega(s)| < b, \forall s \leq t] = P_0[(\mathbf{m}_{-b} > t) \text{ et } (\mathbf{m}_b > t)]. \quad (2.25)$$

La densité de probabilité correspondante $P_0[x; t \text{ et } (|\omega(s)| < b)]$ devra satisfaire

$$\begin{cases} \partial_t f(x; t) = \frac{1}{2} \partial_x^2 f(x; t) \\ f(x; 0) = \delta(x), \quad f(\pm b; t) = 0, \end{cases} \quad (-b \leq x \leq b). \quad (2.26)$$

D'après la discussion ci-dessus, la combinaison $f_0(x; t) - f_0(2b - x; t)$ possède les propriétés que l'on veut sauf la condition frontière en $-b$. Par le même principe que plus haut, on remédie à cela en soustrayant la même combinaison réfléchiée à travers un miroir placé en $-b$, formant donc

$$[f_0(x; t) - f_0(2b - x; t)] - [f_0(-2b - x; t) - f_0(4b + x; t)]. \quad (2.27)$$

Cette nouvelle combinaison s'annule bien en $-b$, mais par contre ce que l'on vient de rajouter ne s'annule plus en b . A nouveau on corrige cela en y rajoutant un troisième terme

$$\begin{aligned} & [f_0(x; t) - f_0(2b - x; t)] - [f_0(-2b - x; t) - f_0(4b + x; t)] \\ & \quad + [f_0(-4b + x; t) - f_0(6b - x; t)], \end{aligned} \quad (2.28)$$

⁴En électromagnétisme, cette technique est utilisée pour résoudre l'équation de Poisson avec des conditions aux bords non-triviales. Le deuxième terme correspond dans ce cas à l'introduction d'une charge virtuelle en $x = 2b$.

mais la combinaison obtenue ne s'annule plus en $-b$! On voit bien qu'on n'arrivera pas à satisfaire les deux conditions frontières avec un nombre fini de soustractions. Par contre, la combinaison infinie

$$f(x; t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n f_0(x + 2nb; t) \quad (2.29)$$

vérifie bien $f(\pm b; t) = 0$ en vertu de la propriété de symétrie $f_0(x; t) = f_0(-x; t)$ de la mesure de Wiener. La condition initiale est également vérifiée (dans le domaine d'intérêt).

La somme infinie est donc la solution du problème que l'on peut réécrire

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \theta_4 \left(\frac{ibx}{t} \middle| \frac{2ib^2}{\pi t} \right), \quad (2.30)$$

en termes de la fonction theta

$$\theta_4(z|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos 2nz e^{i\pi n^2 \tau}. \quad (2.31)$$

Tout comme les fonctions theta rencontrées au chapitre 1, la fonction θ_4 satisfait une relation de transformation modulaire, $\theta_4(z|\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} e^{-iz^2/\pi\tau} \theta_2\left(\frac{z}{\tau} \middle| \frac{-1}{\tau}\right)$, avec θ_2 définie à l'équation (1.48) du chapitre 1.

La solution $f(x; t)$ s'exprime donc comme

$$f(x; t) = \frac{1}{2b} \theta_2 \left(\frac{\pi x}{2b} \middle| \frac{i\pi t}{2b^2} \right) = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2b} e^{-\pi^2(n+\frac{1}{2})^2/2b^2}. \quad (2.32)$$

On obtient finalement la probabilité recherchée comme

$$P_0[|\omega(s)| < b, \forall s \leq t] = \int_{-b}^b dx f(x; t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-(2n+1)^2\pi^2 t/8b^2}. \quad (2.33)$$

La comparaison de ce résultat avec l'analogie dans le discret est éloquente. Elle nous confirme que la marche continue reproduit le régime asymptotique de la marche discrète. On vérifie en particulier la limite d'échelle

$$P_0^{\text{cont}}[|\omega(s)| < b, \forall s \leq t] = \lim_{a \rightarrow 0} P_0^{\text{disc}}[|\omega(s)| < \frac{b}{a}, \forall s \leq \frac{t}{a^2}]. \quad (2.34)$$

2.5 GÉNÉRATEUR DU MOUVEMENT BROWNIEN

Le mouvement brownien est un processus stochastique, dont l'essence est de définir une dynamique stochastique, c'est-à-dire aléatoire. Plus précisément, un processus stochastique

est une collection de variables aléatoires X_t , à valeurs dans un espace S , indicée par un ensemble (discret ou continu) d'indices t que l'on peut associer à une variable temporelle. La suite $(X_t)_t$ donne alors l'évolution d'un point de S au cours du temps t , cette évolution étant aléatoire puisque les positions X_t sont des variables aléatoires, de distributions données. De plus, lorsque le processus possède la propriété de Markov (la trajectoire considérée après le temps t ne dépend que de la position au temps t), les variables sont en quelque sorte "dynamiquement" reliées les unes aux autres: leurs distributions se propagent dans le temps au travers de l'équation de Chapman–Kolmogorov.

Dans le cas du mouvement brownien, la suite est définie par $(\omega(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec $\omega(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . Leur distribution est donnée par

$$P_0(\omega(t) \in dx) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-|x|^2/2t} dx, \quad (2.35)$$

pour un départ à l'origine. La suite $(\omega(t))$ détermine donc l'évolution (aléatoire) dans \mathbb{R}^d du marcheur (de la particule) au cours du temps.

Dans une telle situation, on est tenté de définir un opérateur d'évolution, qui implémente l'évolution temporelle sur les variables de position. Ici le choix naturel serait d'introduire un opérateur $T(s)$ qui envoie formellement les variables $\omega(t)$ sur leurs translatées dans le temps $\omega(t+s)$. C'est purement formel, puisque $T(s)$ est supposé agir sur des variables aléatoires.

L'idée permettant de donner du sens à cet opérateur est cependant claire: on peut le faire agir sur les densités de probabilité plutôt que sur les variables aléatoires elles-mêmes, ou mieux encore, sur les valeurs moyennes des variables aléatoires. C'est équivalent à le faire agir sur les densités de probabilité, puisque connaître les valeurs moyennes de toutes les fonctions (dans une bonne classe) des $\omega(t)$ équivaut à connaître les densités de probabilité des $\omega(t)$. L'avantage est d'opérer sur des fonctions ordinaires.

On définit donc les opérateurs d'évolution $T(t)$ par $(\omega_t \equiv \omega(t))$

$$T(t)f(x) = T(t) E_x(f(\omega_0)) = E_x(f(\omega_t)) = \int dy P_x(y; t) f(y), \quad (2.36)$$

où $E_x(\cdot)$ désigne la valeur moyenne par rapport à la mesure de Wiener conditionnée sur un départ en x au temps 0.

Cette famille d'opérateurs T satisfait la propriété additive que l'on attend d'eux, à savoir $T(s)T(t) = T(s+t) = T(t)T(s)$, grâce à l'équation de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned} T(s)T(t)f(x) &= T(s) \int dy f(y) P_x(y; t) = \int dz P_x(z; s) \int dy f(y) P_z(y; t) \\ &= \int dy P_x(y; s+t) f(y) = T(s+t)f(x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le paramètre temporel étant continu, la propriété additive suggère de définir le générateur

infinitésimal des translations dans le temps de la façon habituelle, c'est-à-dire en posant

$$T(t) = e^{-t\Theta}, \quad \Theta = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} T(t). \quad (2.38)$$

Que vaut le générateur du mouvement brownien ?? La réponse suit d'un calcul simple, qui peut se faire de deux manières différentes:

$$\begin{aligned} -\Theta f(x) &= -\Theta E_x(f(\omega_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t T(t) E_x(f(\omega_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t E_x(f(\omega_t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t \int dy f(y) P_x(y; t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int dy f(y) \frac{1}{2} \Delta_x P_x(y; t) \\ &= \frac{1}{2} \Delta_x \int dy f(y) P_x(y; 0) = \frac{1}{2} \Delta f(x), \end{aligned} \quad (2.39)$$

si l'on utilise l'équation de la chaleur avec dérivées spatiales par rapport au point de départ, et

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \int dy f(y) \frac{1}{2} \Delta_y P_x(y; t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int dy \frac{1}{2} \Delta f(y) P_x(y; t) \\ &= \int dy \frac{1}{2} \Delta f(y) P_x(y; 0) = \frac{1}{2} \Delta f(x), \end{aligned} \quad (2.40)$$

si les dérivées sont par rapport au point d'arrivée. On trouve dans les deux cas que

$$\Theta = -\frac{1}{2} \Delta, \quad (\text{mouvement brownien standard}). \quad (2.41)$$

On retrouve l'opérateur caractéristique de la diffusion, mais on sent poindre aussi une analogie avec la mécanique quantique d'une particule libre: Θ est le générateur infinitésimal des translations dans le temps —le hamiltonien !—, et sa représentation dans un espace fonctionnel est (moins) le laplacien, exactement le hamiltonien pour une particule libre. Cette analogie se reserrera par la suite.

La notion de générateur est importante car il caractérise univoquement un processus de Markov. La raison en est simplement que la connaissance du générateur permet de calculer les densités de probabilité des variables aléatoires, qui, avec la propriété de Markov, permet de construire une mesure sur l'espace des trajectoires du processus (l'équivalent de la mesure de Wiener). Effectivement, on a pour toute fonction f (dans la classe appropriée)

$$\begin{aligned} -\partial_t T(t) f(x) &= \Theta T(t) f(x) = \Theta \int dy f(y) P_x(y; t) \\ &= \int dy f(y) \Theta_x P_x(y; t) = - \int dy f(y) \partial_t P_x(y; t). \end{aligned} \quad (2.42)$$

La dernière égalité montre que les densités $P_x(y; t)$ satisfont

$$-\partial_t P_x(y; t) = \Theta_x P_x(y; t), \quad P_x(y; 0) = \delta(x - y), \quad (2.43)$$

où l'opérateur Θ agit sur la variable x , c'est-à-dire le point de *départ*. Cette équation détermine univoquement $P_x(y; t)$, qui apparaît comme la solution fondamentale de l'équation différentielle, ou comme le noyau de l'opérateur d'évolution, $e^{-t\Theta}(y, x) = P_x(y; t)$, comme le montre clairement l'équation (2.36).

Notons que si $P_x(y; t)$ satisfait une équation différentielle analogue à (2.43), mais avec dérivées spatiales par rapport au point d'arrivée y , l'opérateur différentiel spatial sera l'adjoint du générateur, comme le montre la chaîne d'équations (2.40) dans laquelle des intégrations par parties doivent être effectuées. On aura ainsi

$$-\partial_t P_x(y; t) = \Theta_y^\dagger P_x(y; t), \quad P_x(y; 0) = \delta(x - y). \quad (2.44)$$

Ces distinctions sont inutiles dans le cas du mouvement brownien, puisque le générateur est le laplacien, auto-adjoint (sur l'espace des fonctions L^2 , avec le produit scalaire habituel, implicitement présent). Deux exemples où le générateur et son adjoint sont distincts sont proposés en exercices (notamment le mouvement brownien avec entraînement).

La première équation de (2.42) montre que les valeurs moyennes à l'instant t , $u(x; t) \equiv T(t)f(x) = E_x(f(\omega_t))$ satisfont aussi l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} -\partial_t u(x; t) = \Theta u(x; t), \\ u(x; 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.45)$$

2.6 FORMULE DE KAC

Pour le calcul de propriétés statistiques du mouvement brownien, il est utile de généraliser la formule précédente. La généralisation correspondante permet en outre d'établir un lien solide avec l'intégrale de chemins en mécanique quantique (la formule que l'on s'appête à dériver est d'ailleurs parfois appelée formule de Feynman-Kac⁵).

La section précédente a permis de calculer, via la résolution d'une équation différentielle, la moyenne $E_x(f(\omega_t))$. La formule de Kac est une généralisation de cela pour la quantité

$$u(x; t) = E_x \left[e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} f(\omega_t) \right], \quad (2.46)$$

qui se ramène au cas précédent si la fonction V est identiquement nulle. Nous allons voir tout de suite que $u(x; t)$ satisfait aussi une équation différentielle.

Le principal avantage réside dans la possibilité d'évaluer une moyenne de fonctionnelles intégrales du processus stochastique et ainsi de sonder la trajectoire de façon continue, et non plus simplement à des moments intermédiaires. Techniquement, cela fait une différence appréciable. Alors que sonder la trajectoire à des instants précis requiert juste la connaissance des distributions de positions $P_x(y; t)$, le fait de suivre la trajectoire tout au cours de son

⁵C'est 1948 que Feynman, sur une suggestion très antérieure de Dirac, a proposé sa formulation de la mécanique quantique en intégrale de chemins. Kac a quant à lui publié sa formule en 1951.

déroulement nécessite une mesure de probabilité sur les trajectoires elles-mêmes, c'est-à-dire la mesure de Wiener, dont les densités $P_x(y; t)$ ne sont que des faibles traces.

Plutôt que de calculer l'équation différentielle pour $u(x; t)$, nous allons dériver celle satisfaite par sa transformée de Laplace ⁶

$$\widehat{u}(x; \alpha) = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} u(x; t) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} f(\omega_t). \quad (2.47)$$

Pour $V = 0$, on tire facilement de (2.45), que l'équation différentielle s'écrit simplement

$$\begin{cases} \widehat{u}(x; \alpha) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t), \\ (\Theta + \alpha)\widehat{u} = f(x). \end{cases} \quad (2.48)$$

Observons d'abord que

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} &= e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \left\{ e^{\int_0^t V(\omega_s) ds} - 1 \right\} = e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \int_0^t d\tau \partial_\tau e^{\int_0^\tau V(\omega_s) ds} \\ &= e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{\int_0^\tau V(\omega_s) ds} \\ &= \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds + \int_0^\tau V(\omega_s) ds} \\ &= \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_\tau^t V(\omega_s) ds} = \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_0^{t-\tau} V(\omega_{\tau+s}) ds}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

On obtient donc, en échangeant les intégrations sur t et τ ,

$$\begin{aligned} E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \left\{ 1 - e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \right\} f(\omega_t) &= E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - u(x; \alpha) \\ &= E_x \int_0^\infty d\tau V(\omega_\tau) \int_\tau^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^{t-\tau} V(\omega_{\tau+s}) ds} f(\omega_t) \\ &= E_x \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha\tau} V(\omega_\tau) \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega_{\tau+s}) ds} f(\omega_{\tau+t}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Remarquons que l'intégrale sur t ne dépend de la marche qu'à partir des temps τ . On sait, par la propriété de Markov (propriété P2 dans le chapitre 1 ou l'équation (2.18) ci-dessus), que la marche pour des temps ultérieurs à τ ne dépend que de la position au temps

⁶La preuve donnée ici est due à K. Itô (notes de cours). Kac lui-même donne une preuve pour le mouvement brownien, dans les variables originales x et t , c'est-à-dire sans passer par la transformée de Laplace, dans son livre mentionné au début de ces notes.

τ . L'intégrale sur t concerne donc une marche qui peut être considérée comme démarrant en ω_τ au temps 0. La propriété d'indépendance entraîne donc

$$\begin{aligned} E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - \hat{u} &= E_x \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha\tau} V(\omega_\tau) E_{\omega_\tau} \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} f(\omega_t) \\ &= E_x \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha\tau} V(\omega_\tau) \hat{u}(\omega_\tau; \alpha). \end{aligned} \quad (2.51)$$

La fonction \hat{u} s'exprime donc en termes de deux valeurs moyennes qui ne font intervenir que la position de la marche à un instant précis, c'est-à-dire du type que l'on a examiné à la section précédente. Dès lors, appliquant l'opérateur $\Theta + \alpha$ et utilisant (2.48), on trouve la formule de Kac

$$\begin{cases} \hat{u}(x; \alpha) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} f(\omega_t), \\ (\Theta + \alpha + V)\hat{u} = f(x). \end{cases} \quad (2.52)$$

Cette formule est valide pour un processus stochastique ayant la propriété de Markov et de générateur Θ , où bien sûr l'espérance $E_x(\cdot)$ désigne la moyenne par rapport à la mesure du processus en question.

Repassant à la variable t , il est facile de voir que la formule de Kac prend la forme

$$\begin{cases} u(x; t) = E_x \left[e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} f(\omega_t) \right], \\ (\Theta + V)u = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad u(x; 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.53)$$

Sous des conditions assez générales, la solution $u(x; t)$ à cette equation est unique.

Cette formule est importante pour le calcul de propriétés concrètes du mouvement brownien (ou de tout autre processus de Markov), mais établit aussi un pont intéressant avec la formulation fonctionnelle (en intégrale de chemins) de la mécanique quantique. Effectivement, dans le cas du mouvement brownien, la formule de Kac devient particulièrement suggestive (pour un physicien tout au moins !) si on se rappelle que $\Theta = -\frac{1}{2}\Delta$. L'expression différentielle spatiale $-\frac{1}{2}\Delta + V$ apparaît alors comme un Hamiltonien quantique ...

En guise de préparation, il sera très instructif d'examiner la question suivante. On sait que le mouvement brownien est la limite d'échelle d'une marche aléatoire symétrique. Qu'obtient-on si on effectue une limite d'échelle sur les marches aléatoires pondérées de la fin du chapitre 1 ? Quel processus stochastique obtient-on et quel est son générateur ?

2.7 MOUVEMENT BROWNIEN DANS UN POTENTIEL

Les marches aléatoires perturbées de la section 1.8 étaient définies par les probabilités de transition suivantes

$$p(\vec{m} \rightarrow \vec{n}) \sim \frac{w(\vec{n})}{2d} \delta_{\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle}, \quad \vec{m}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad (2.54)$$

où les nombres positifs $w(\vec{n})$ sont fixés une fois pour toutes. Le symbole \sim indiquait que ces nombres sont des probabilités relatives, non-normalisées à 1, i.e. $\sum_{\vec{n}} p(\vec{m} \rightarrow \vec{n}) \neq 1$.

Utilisant malgré tout les poids non-normalisés ci-dessus, on a montré aussi que la “distribution” de position $P_{\vec{m}}^w(\vec{n}; N)$ satisfait deux équations aux différences finies, par rapport au point de départ ou par rapport au point d’arrivée. Contrairement aux marches symétriques, nous ne disposons pas d’une expression explicite de $P_{\vec{m}}^w(\vec{n}; N)$. Nous en calculerons donc la limite du continu de manière indirecte, en étudiant l’équation différentielle qu’elle doit satisfaire. Etant donné que le générateur est plus intimement lié à un opérateur différentiel par rapport au point de départ, nous choisirons de considérer l’équation aux différences correspondante. Celle-ci a été donnée en (1.87)

$$P_{\vec{m}}^w(\vec{n}; N + 1) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[w(\vec{m} + \vec{e}_i) P_{\vec{m}+\vec{e}_i}^w(\vec{n}; N) + w(\vec{m} - \vec{e}_i) P_{\vec{m}-\vec{e}_i}^w(\vec{n}; N) \right]. \quad (2.55)$$

On supposera que les comportements d’échelle des variables d’espace et de temps sont les mêmes que pour la marche symétrique. On posera donc $\vec{m} = \frac{\vec{x}}{a}$, $\vec{n} = \frac{\vec{y}}{a}$ et $N = \frac{dt}{a^2}$, et on s’intéressera à la limite de $a^{-d} P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2})$ pour a tendant vers 0.

Effectuant un développement de Taylor à l’ordre 2 en a , on a

$$P_{\vec{m}}^w(\vec{n}; N + 1) = P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2} + 1) = P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}) + \frac{a^2}{d} \partial_t P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}) + \dots \quad (2.56)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & w(\vec{m} + \vec{e}_i) P_{\vec{m}+\vec{e}_i}^w(\vec{n}; N) + w(\vec{m} - \vec{e}_i) P_{\vec{m}-\vec{e}_i}^w(\vec{n}; N) \\ &= w\left(\frac{\vec{x}+\vec{a}\vec{e}_i}{a}\right) P_{\frac{\vec{x}+\vec{a}\vec{e}_i}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) + w\left(\frac{\vec{x}-\vec{a}\vec{e}_i}{a}\right) P_{\frac{\vec{x}-\vec{a}\vec{e}_i}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) \\ &= 2w\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) + a^2 \partial_i^2 \left[w\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

Replaçant ces développements dans l’équation aux différences finies donne

$$\frac{a^2}{d} \frac{\partial}{\partial t} P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) + \dots = \left[w\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) - 1 \right] P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) + \frac{a^2}{2d} \Delta \left[w\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) P_{\frac{\vec{x}}{a}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right) \right] + \dots \quad (2.58)$$

La discussion de la limite de cette équation est typique des limites d’échelle. Dépendant de la façon dont $[w(\frac{\vec{x}}{a}) - 1] \sim a^\nu$ se comporte en termes de l’échelle a , on peut trouver une limite triviale ($\nu < 2$: les densités limites sont nulles), ou une limite non-triviale mais identique au cas non-perturbé ($\nu > 2$; la perturbation $w \sim 1 + a^\nu$ est trop faible). Seul le cas $\nu = 2$ produit une limite non-triviale, dans laquelle la perturbation a réellement un effet.

Nous posons donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} [w(\frac{\vec{x}}{a}) - 1] = -\frac{1}{d} V(x), \quad (2.59)$$

en termes d'une fonction $V(x)$ qui deviendra bientôt un potentiel.

Définissant alors la limite d'échelle de la distribution comme

$$P_{\vec{x}}^V(\vec{y}; t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_{\vec{x}}^w\left(\frac{\vec{y}}{a}; \frac{dt}{a^2}\right), \quad (2.60)$$

on trouve que cette limite satisfait l'équation différentielle

$$-\frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{x}}^V(\vec{y}; t) = \left[-\frac{1}{2}\Delta_x + V\right] P_{\vec{x}}^V(\vec{y}; t), \quad (2.61)$$

ainsi que la condition initiale $P_{\vec{x}}^V(\vec{y}; 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$ (pour laquelle le facteur a^{-d} dans la définition de P^V est nécessaire).

Notons que (2.59) est consistante avec la forme $w(\vec{m}) = w(\vec{x}/a) = e^{-a^2 V(\vec{x})/d}$ et est conforme à l'image que l'on se fait du potentiel: la probabilité w sera grande pour les régions où le potentiel est bas, et au contraire faible pour les régions où le potentiel est élevé. Le potentiel favorise donc la marche vers les régions où il est minimal.

On peut répéter le calcul ci-dessus en partant de l'équation (1.86) de récurrence par rapport au point d'arrivée. On trouverait dans ce cas précisément la même équation différentielle (2.61) avec le laplacien agissant dans la variable y , conformément au fait que $-\frac{1}{2}\Delta + V$ est auto-adjoint.

Nous avons calculé la limite du continu des "distributions" discrètes $P_{\vec{m}}^w(\vec{n}; N)$, non-normalisées. Il est évident que la limite du continu n'arrange pas le problème de normalisation, et que les quantités $P_{\vec{x}}^V(\vec{y}; t)$ sont aussi peu des distributions que ne l'étaient les $P_{\vec{m}}^w(\vec{n}; N)$. Par contre elles satisfont toutes les deux l'équation de Chapman-Kolmogorov (discrète ou continue selon le cas), ce qui nous permet de définir comme auparavant un opérateur d'évolution $T^V(t) = e^{-tH}$ de générateur infinitésimal H . Son action peut être définie comme pour le mouvement brownien, à l'aide cette fois des P^V :

$$T^V(t) f(x) = \int dy f(y) P_x^V(y; t). \quad (2.62)$$

L'équation différentielle satisfaite par $P_x^V(y; t)$ montre que

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V. \quad (2.63)$$

L'opérateur $T^V(t)$ est un opérateur d'évolution, mais n'est pas l'opérateur d'évolution d'un processus de Markov, du fait qu'il ne conserve pas les probabilités. (Toujours à cause de la normalisation; si la distribution initiale $P_x^V(y; 0) = \delta(x-y)$ est bien normalisée, $P_x^V(y; t)$ ne l'est pas. On peut le vérifier en prenant $f \equiv 1$ dans (2.62) et observant que $H1 \neq 0$ si $V \neq 0$.) C'est la raison pour laquelle on a dénoté son générateur par H , réservant la notation Θ pour le générateur d'un processus de Markov. Il existe une procédure canonique (via une conjugaison) qui permet d'associer à un hamiltonien H (dont les distributions P^V ne sont

pas normalisées) le générateur Θ d'un processus de Markov, qui possède des distributions correctement normalisées. Bien entendu, le processus de Markov correspondant n'est plus la limite du continu des marches pondérées qui ont mené à H . L'exemple de l'oscillateur harmonique ($V = \frac{1}{2}x^2$) est proposé en exercice.

Parallèlement à ce qu'on avait fait pour le mouvement brownien dans la section 5, on trouve ici que la valeur moyenne $u(x; t) = E_x^V(f(\omega_t))$ (nous conservons la notation ω pour le processus modifié; le "V" attaché au symbole de l'espérance indique de quel processus il s'agit) satisfait l'équation différentielle

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2}\Delta + V\right)u. \quad (2.64)$$

En vertu de la formule de Kac pour le mouvement brownien, on a pour u une formule alternative, comme moyenne sur le mouvement brownien d'une fonctionnelle qui dépend de la fonction V

$$u(x; t) = E_x^V[f(\omega_t)] = E_x\left[e^{-\int_0^t V(\omega_s)ds} f(\omega_t)\right]. \quad (2.65)$$

En particulier, pour $f(x) = \delta(x - y)$, la distribution de position $P_x^V(y; t)$ elle-même s'exprime comme moyenne sur le mouvement brownien:

$$P_x^V(y; t) = E_x\left\{\delta(\omega_t - y) e^{-\int_0^t V(\omega_s)ds}\right\}. \quad (2.66)$$

Le résultat important de cette section est de reconnaître qu'une certaine forme de perturbation des marches standards, définies en termes de marches pondérées bien que n'y correspondant pas *stricto sensu*, est équivalente dans un certain sens au mouvement d'une particule dans un potentiel. La question de savoir ce que l'on trouve si l'on s'intéresse aux marches pondérées elles-mêmes, avec des distributions discrètes correctement normalisées, est proposée en exercice.

2.8 FORMULE DE FEYNMAN

On l'a vu, la formule de Kac pour le mouvement brownien montre une similitude frappante avec la mécanique quantique. La relation est formelle puisqu'il s'agit de la mécanique quantique à temps imaginaire, mais il est néanmoins instructif de la préciser quelque peu.

Pour un temps imaginaire, la fonction d'onde d'une particule dans un potentiel V satisfait l'équation de Schrödinger (on a fait la substitution $t \rightarrow -it$)

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Psi(y, t) = H\Psi(y, t) = \left[-\frac{1}{2}\Delta + V\right]\Psi(y, t). \quad (2.67)$$

La solution peut s'exprimer en termes du noyau K de l'opérateur d'évolution e^{-tH} :

$$\Psi(y, t) = e^{-tH}\Psi(y, 0) \equiv \int dx K(y, x; t) \Psi(x, 0). \quad (2.68)$$

Le noyau lui-même est la solution fondamentale (la fonction de Green) de l'équation de Schrödinger. Effectivement $K(y, x; t)$ satisfait l'équation de Schrödinger,

$$0 = [\partial_t + H]\Psi(y; t) = \int dx [\partial_t + H]K(y, x; t) \Psi(x, 0), \quad (2.69)$$

avec la condition initiale $K(y, x; 0) = \delta(x - y)$ puisque $\Psi(y, 0) = \int dx K(y, x; 0) \Psi(x, 0)$.

La formule de Feynman exprime le noyau de l'opérateur d'évolution comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins qui vont de x à y , chaque chemin étant pondéré par un facteur donné par l'exponentielle de l'action calculée sur le chemin en question:

$$\begin{aligned} K(y, x; t) &= \langle y | e^{-tH} | x \rangle = \int_{\substack{x(0)=x \\ x(t)=y}} \mathcal{D}x(s) e^{-S(x(\cdot), t)} \\ &= \int_{x(0)=x} \mathcal{D}x(s) e^{-\int_0^t [\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + V(x(s))] ds} \delta(x(t) - y). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Le facteur e^{-S} apparaît donc formellement comme une densité de probabilité et le noyau $K(y, x; t)$ comme la probabilité d'aller de x à y en un temps t , (alors qu'en temps réel, le noyau de e^{-itH} donne l'amplitude de probabilité d'aller de x à y en un temps t , et non la probabilité elle-même).

Il est manifeste de la section précédente que le noyau $K(y, x; t)$ n'est rien d'autre que la distribution de position $P_x^V(y; t)$ du mouvement brownien perturbé, pour laquelle on a donné deux expressions,

$$K(y, x; t) = P_x^V(y; t) = E_x^V[\delta(\omega_t - y)] = E_x \left[e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \delta(\omega_t - y) \right], \quad (2.71)$$

et qui proviennent de deux points de vue distincts sur une même quantité. Dans l'un, basé sur le mouvement brownien, on calcule la valeur moyenne d'une fonctionnelle non-triviale d'un processus simple et bien maîtrisé, alors que dans l'autre, on a la moyenne d'une fonctionnelle simple, mais calculée avec une mesure plus compliquée, et qui intègre les effets du potentiel.

Du côté mécanique quantique, ces deux points de vue correspondent exactement à la séparation de l'action totale en une partie cinétique, $S_{\text{cin}} = \int_0^t \frac{1}{2}\dot{x}^2(s) ds$, et une partie potentielle. Ainsi dans (2.70), on peut considérer que le noyau $K(y, x; t)$ est la valeur moyenne de $\delta(x(t) - y)$ calculée avec la mesure $\mathcal{D}x(s) e^{-S}$ construite sur l'action complète (mesure qui est d'ailleurs pas normalisée si le potentiel est non-nul), ou comme la moyenne de $e^{-\int_0^t V(x(s)) ds} \delta(x(t) - y)$ calculée avec la mesure "libre" $\mathcal{D}x(s) e^{-S_{\text{cin}}}$ (correctement normalisée). Ceci mène à deux écritures possibles du noyau

$$K(y, x; t) = \langle \delta(x(t) - y) \rangle_S = \langle e^{-\int_0^t V(x(s)) ds} \delta(x(t) - y) \rangle_{S_{\text{cin}}}, \quad (2.72)$$

qui font écho aux deux formules stochastiques (2.71). En les comparant, on voit que la mesure de Wiener est bien l'analogie de la mesure libre $\mathcal{D}x(s) e^{-S_{\text{cin}}}$ dans la formule de Feynman.

Il peut être utile de mentionner que le véritable noyau de Feynman à temps réel, c'est-à-dire $K(y, x; it)$, n'est pas normalisé non plus, $\int dy K(y, x; it) \neq 1$. Dans le contexte quantique, ça ne pose cependant pas de problème car seul compte le fait que la probabilité (et non l'amplitude de probabilité) soit conservée, ce qu'elle est effectivement, $K(y, x; it)$ étant le noyau d'un opérateur unitaire (e^{-itH}).

2.9 ETATS LIÉS EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

L'expression du noyau de Feynman comme valeur moyenne sur le mouvement brownien permet également de relier l'existence/absence d'états liés pour une particule dans un potentiel attractif, à la propriété de récurrence/transience du mouvement brownien. Rappelons l'affirmation du côté quantique: un potentiel attractif en dimensions $d = 1, 2$ possède toujours au moins un état lié, alors que ce n'est plus le cas si $d \geq 3$. Ce qui suit ne constitue pas une preuve, mais fournit une explication heuristique du lien entre les deux choses (et une piste aussi pour une preuve rigoureuse).

Le noyau de Feynman $K(y, x; t) = \langle y | e^{-tH} | x \rangle$ correspond aux éléments de matrice de l'opérateur d'évolution e^{-tH} . Insérant une base de fonctions propres de H (les états stationnaires), on trouve

$$K(y, x; t) = \sum_n e^{-E_n t} \psi_n^*(x) \psi_n(y). \quad (2.73)$$

La somme est formelle et peut comprendre une partie discrète et une partie continue pour les parties du spectre de H correspondantes.

Lorsque t est très grand, la somme est dominée par l'état fondamental (non-dégénéré), et en intégrant sur y , on a

$$e^{E_0 t} \int dy K(y, x; t) = \psi_0^*(x) \int dy \psi_0(y) + \dots = a_0 \psi_0^*(x) + \dots, \quad \text{pour } t \gg 1. \quad (2.74)$$

Appliquant $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log$ à cette équation, et insérant l'expression du noyau fournie par la formule de Kac, il vient

$$E_0 = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x \left\{ e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \right\}, \quad (2.75)$$

qui donne une expression effective de l'énergie de l'état fondamental en termes d'une moyenne sur le mouvement brownien.

Sans perte de généralité, on peut supposer que le potentiel est un puits de profondeur $\lambda > 0$ et de support S , c'est-à-dire $V(x) = -\lambda \chi_S(x)$, avec $\chi_S(x)$ la fonction indicatrice de S .

Dans ce cas, on a clairement que $-\int_0^t V(\omega_s) ds = \lambda \tau_S(t)$ est le temps passé par la particule brownienne dans le domaine S , et pendant un laps de temps t . Dès lors,

$$E_0 = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x (e^{\lambda \tau_S(t)}). \quad (2.76)$$

Il est évident que le temps local satisfait $\tau_S(t) \leq t$ de sorte que la limite est bien définie. D'autre part, c'est une fonction croissante de t , et c'est précisément son taux de croissance (en moyenne) qui déterminera la valeur de E_0 . Si la moyenne croît comme

$$E_x(e^{\lambda\tau_S(t)}) \sim e^{\alpha t^\beta}, \quad (2.77)$$

on aura $E_0 < 0$, et donc un état lié, si et seulement si $\beta = 1$, et pas d'état lié, $E_0 = 0$, si $\beta < 1$. L'existence d'un état lié est donc conditionnée par la probabilité que la particule passe dans le support du potentiel une fraction linéaire de son temps. Cette conclusion semble raisonnable puisque la localisation de la particule autour du support de V , et donc l'existence d'un état lié, traduit justement sa "capture" par le potentiel.

Il semble raisonnable aussi de penser que la capture sera beaucoup plus probable en $d = 1$ et 2, puisque le mouvement brownien y est récurrent: la particule est sûre de revenir une infinité de fois dans le support du potentiel, y passant à chaque fois un certain temps. (Pour le cas $d = 1$, voir l'exercice 11.)

En dimension $d \geq 3$ par contre, les conclusions changent puisque la particule ne revient pas une infinité de fois dans S avec probabilité 1. Il faut donc compenser la tendance naturelle de la particule à ne plus vouloir revenir dans S en augmentant l'étendue et la profondeur de S , pour ainsi maintenir un temps local $\tau_S(t)$ qui croît linéairement. Dans ce cas, l'existence d'un état lié sera conditionnée par l'étendue du support du potentiel et par sa profondeur. C'est un problème classique des manuels de mécanique quantique que de trouver les états liés d'une particule dans un puits de potentiel sphérique, $V(r) = -\lambda$ si $r < a$, et $V(r) = 0$ en dehors de la sphère de rayon a . On trouve par exemple qu'en $d = 3$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait (au moins) un état est $a^2\lambda \geq \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}$.

2.10 EXEMPLE D'APPLICATION DE LA FORMULE DE KAC

Les calculs de la section 2 peuvent être refaits (et *a posteriori* justifiés pour ce qui est des conditions frontières) à l'aide de la formule de Kac, de même que la loi de l'arcsinus pour le mouvement brownien peut être dérivée de cette manière. Laissant plutôt ces dérivations alternatives en exercice, nous illustrerons l'utilisation que l'on peut faire de la formule de Kac en considérant le problème (en $d = 1$) de déterminer la fraction de temps que passe la particule sur la partie positive de l'axe réel avant d'atteindre un certain point $b > 0$, fixé à l'avance.

On demande de calculer la distribution de cette fraction de temps, ou de façon équivalente, sa transformée de Laplace,

$$E_0[e^{-\beta|\{s \leq \mathbf{m}_b : \omega_s \geq 0\}|}] = \int_0^\infty e^{-\beta t} P_0[|\{s \leq \mathbf{m}_b : \omega_s \geq 0\}| \in dt], \quad (2.78)$$

où comme d'habitude \mathbf{m}_b est le temps de premier passage en b . La différence avec le problème menant à la loi de l'arcsinus est qu'ici, le temps d'arrêt de la marche est le temps aléatoire \mathbf{m}_b au lieu d'être un temps déterministe t .

Considérons pour cela la quantité

$$u(x) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\beta \int_0^t \chi_0(\omega_s) ds - \gamma \int_0^t \chi_b(\omega_s) ds} \chi_0(\omega_t), \quad (2.79)$$

dans laquelle χ_a est la fonction indicatrice du segment $[a, \infty[$ (vaut 0 à gauche de a et 1 à droite de a).

Avant de calculer u , montrons d'abord qu'elle fournit bien la solution du problème. Effectivement, on peut voir que

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} u(0) &= E_0 \int_0^\infty dt e^{-\beta \int_0^t \chi_0(\omega_s) ds} \chi_0(\mathbf{m}_b - t) \chi_0(\omega_t) \\ &= -\frac{1}{\beta} E_0 \int_0^{\mathbf{m}_b} dt \frac{d}{dt} e^{-\beta \int_0^t \chi_0(\omega_s) ds} \\ &= \frac{1}{\beta} \left[1 - E_0[e^{-\beta \int_0^{\mathbf{m}_b} \chi_0(\omega_s) ds}] \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

L'intégrale dans l'argument de l'exponentielle dans la dernière expression est exactement la fraction de temps que l'on souhaite calculer.

D'après la formule de Kac, la fonction u satisfait l'équation différentielle

$$\left[-\frac{1}{2}d_x^2 + \beta\chi_0 + \gamma\chi_b\right]u = \chi_0. \quad (2.81)$$

La résolution ne pose pas de problème mais nécessite de distinguer trois régions. On trouve les solutions générales dans chacune d'elles:

$$x < 0 : \quad u = A_1 + A_2x, \quad (2.82)$$

$$0 < x < b : \quad u = B_1 e^{\sqrt{2\beta}x} + B_2 e^{-\sqrt{2\beta}x} + \frac{1}{\beta}, \quad (2.83)$$

$$b < x : \quad u = C_1 e^{\sqrt{2(\beta+\gamma)}x} + C_2 e^{-\sqrt{2(\beta+\gamma)}x} + \frac{1}{\beta + \gamma}. \quad (2.84)$$

La définition de u implique que c'est une fonction bornée et suffisamment régulière. Qu'elle soit bornée impose $A_2 = C_1 = 0$, et la continuité de u et u' aux points de raccord (0 et b) déterminent complètement les quatre coefficients restants. En particulier, on trouve $B_1 = B_2$, $A_1 = 2B_1 + \frac{1}{\beta}$ et

$$2B_1 = \frac{\frac{1}{\beta+\gamma} - \frac{1}{\beta}}{\cosh b\sqrt{2\beta} + \sqrt{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} \sinh b\sqrt{2\beta}}. \quad (2.85)$$

On en déduit de suite que

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} u(0) = \frac{1}{\beta} + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} 2B_1 = \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{1}{\cosh b\sqrt{2\beta}} \right]. \quad (2.86)$$

Une simple comparaison avec l'expression (2.80) implique le résultat:

$$E_0[e^{-\beta \int_0^{\mathbf{m}_b} \chi_0(\omega_s) ds}] = \frac{1}{\cosh b\sqrt{2\beta}}. \quad (2.87)$$

Dérivant cette expression par rapport à β , on trouve par exemple la valeur moyenne du temps passé sur \mathbb{R}_+ avant d'atteindre le point b :

$$E_0\left[\int_0^{\mathbf{m}_b} \chi_0(\omega_s) ds\right] = b^2. \quad (2.88)$$

Pour rappel, le temps moyen de premier passage en b diverge, $E_0[\mathbf{m}_b] = +\infty$.

La distribution elle-même s'obtient en inversant la transformée de Laplace. Le résultat s'exprime (une nouvelle fois) en termes d'une fonction elliptique θ_1 (définition en (1.59)):

$$\begin{aligned} P_0[\{|s \leq \mathbf{m}_b : \omega(s) \geq 0\}| \in dt] &= \frac{\pi}{2b^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t / 8b^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4b^2} \theta_1'(0 \mid \frac{i\pi t}{2b^2}) dt, \end{aligned} \quad (2.89)$$

dont le graphe est reproduit à la figure 4. La transformation modulaire de $\theta_1'(0 \mid \tau)$ de l'équation (1.60), à savoir $\theta_1'(0 \mid \tau) = (-i\tau)^{-\frac{3}{2}} \theta_1'(0 \mid -\frac{1}{\tau})$ implique une mystérieuse invariance de la distribution lorsque les variables b et t sont mélangées de façon compliquée ...

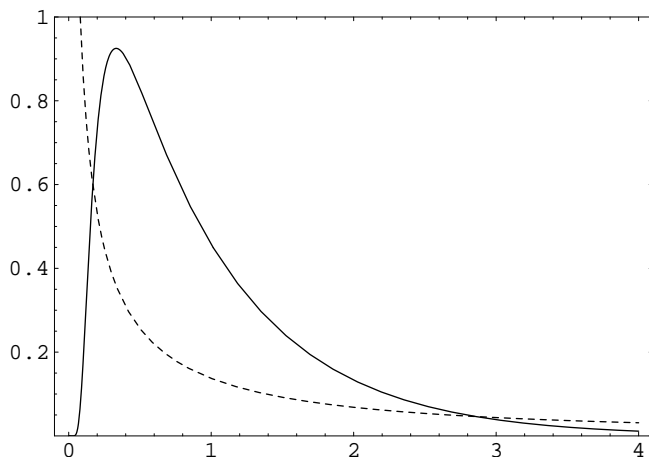


Figure 4: La courbe continue représente le graphe de la densité de probabilité (2.89) pour la valeur $b = 1$. Celle en pointillé donne le résultat analogue pour une valeur négative de b , à savoir $b = -1$. Le problème correspondant est proposé en exercice.

On peut remarquer que la transformée de Laplace (2.87) ne dépend de β et b qu'au travers de la combinaison $\sqrt{\beta}b$, en accord avec la propriété d'invariance d'échelle du mouvement brownien, établie au début du chapitre. En effet, sous la substitution $\omega_t \rightarrow \alpha\omega_{t/\alpha^2}$, on trouve que $\mathbf{m}_b \rightarrow \alpha^2\mathbf{m}_{b/\alpha}$, et

$$\beta \int_0^{\mathbf{m}_b} ds \chi_0(\omega_s) \longrightarrow \beta \int_0^{\alpha^2\mathbf{m}_{b/\alpha}} ds \chi_0(\alpha\omega_{s/\alpha^2}) = \alpha^2\beta \int_0^{\mathbf{m}_{b/\alpha}} ds \chi_0(\omega_s). \quad (2.90)$$

De sorte que β est multiplié par α^2 alors que b est divisé par α . Le même raisonnement s'applique à la distribution où t est cette fois divisé par un facteur α^2 .

2.11 LES PROCESSUS DE BESSEL

Nous terminerons en mentionnant un processus dérivé du mouvement brownien, et qui s'avère utile dans des problèmes à symétrie centrale. Dans ce cas, seule la partie radiale du mouvement brownien est pertinente. Le processus correspondant s'appelle un processus de Bessel (d -dimensionnel).

Les probabilités de transition ne sont pas difficiles à calculer. Partant d'un point \vec{a} , la densité de probabilité d'arriver en \vec{b} en un temps t est donnée par la mesure de Wiener $\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|\vec{a}-\vec{b}|^2/2t}$. Par conséquent, celle d'arriver en un temps t sur la sphère de rayon b vaut (a et b sont des rayons)

$$P_a^+(b; t) = \int_{|\vec{b}|=b} d\vec{b} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-|\vec{a}-\vec{b}|^2/2t}. \quad (2.91)$$

Par rotation, on peut s'arranger pour que \vec{a} n'ait de composante non-nulle que selon le dernier axe, i.e. $\vec{a} = a(\vec{0}, 1)$. Dans la même écriture, on peut paramétrer \vec{b} par $\vec{b} = b(\vec{u} \sin \theta, \cos \theta)$, où \vec{u} est un vecteur unitaire de dimension $d-1$ (il appartient à la sphère S_{d-2}).

L'intégrale sur \vec{b} revient alors à une intégrale sur \vec{u} (qui donne simplement le volume de la sphère S_{d-2}) et une autre sur θ . Les deux combinées donnent lieu à une fonction de Bessel modifiée⁷:

$$P_a^+(b; t) = \frac{a}{t} e^{-(a^2+b^2)/2t} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}-1}\left(\frac{ab}{t}\right), \quad a, b > 0, t > 0. \quad (2.93)$$

Le calcul du générateur du processus de Bessel d -dimensionnel peut se faire comme pour le mouvement brownien. On trouve, sans trop de surprise, qu'il est donné par la partie radiale du laplacien:

$$\Theta^+ = -\frac{1}{2}\Delta^+ = -\frac{1}{2} \left[d_b^2 + \frac{d-1}{b} d_b \right]. \quad (2.94)$$

En particulier, la mesure de Bessel $P_a^+(b; t)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur radiale:

$$-\partial_t P_a^+(b; t) = -\frac{1}{2}\Delta^+ P_a^+(b; t). \quad (2.95)$$

La formule de Kac reste valable pour les processus de Bessel, pour autant que le générateur correspondant soit utilisé.

⁷Pour $\nu \geq 0$, la fonction de Bessel modifiée $I_\nu(x)$ est la solution régulière à l'origine de

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0. \quad (2.92)$$

Sa normalisation est fixée par $I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + \dots$ pour x petit. L'autre solution indépendante est généralement dénotée par $K_\nu(x)$.

Limites du continu de marches discrètes

1. Pour la marche aléatoire discrète en $d = 1$, vérifier que les moments de la distribution de position sont de la forme $\langle \omega^{2n}(N) \rangle = c_{2n}N^n + \dots$ à l'ordre dominant en N (les moments d'ordre impair sont tous nuls), et calculer les coefficients c_{2n} . Définir ensuite la nouvelle marche $\tilde{\omega}(t) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{a}\omega(\frac{N}{a})$ et en déterminer tous les moments $\langle \tilde{\omega}^{2n}(t) \rangle$. Utiliser ceux-ci pour obtenir la distribution de probabilité des $\tilde{\omega}(t)$ et vérifier que $\tilde{\omega}$ est le mouvement brownien standard en $d = 1$.
(Indication: une fois les moments $\langle \tilde{\omega}^{2n}(t) \rangle$ connus, les utiliser pour déterminer la fonction génératrice $\langle e^{ik\tilde{\omega}(t)} \rangle$, dont on tire la densité de probabilité de $\tilde{\omega}(t)$ par transformée de Fourier.)
2. Montrer que $E_x(\omega_s \omega_t) = x^2 + \min(s, t)$ pour le mouvement brownien ($s, t > 0$).
3. Effectuer la comparaison entre la distribution des temps de premier passage (2.24) dans le continu et la limite du continu du résultat analogue dans le discret (proposé à l'exercice 7 du premier chapitre).
4. Poser le problème de la limite du continu pour la marche discrète asymétrique définie à l'exercice 17 du chapitre 1. En $d = 1$, calculer les distributions de position du processus stochastique continu correspondant, que l'on appelle le mouvement brownien avec entraînement (*drift*), ainsi que son générateur Θ . Vérifier que $\Theta = -\frac{1}{2}d_x^2 - v d_x$, avec v une constante, et que $\Theta^\dagger = -\frac{1}{2}d_x^2 + v d_x$.
5. Calculer la limite du continu de la marche aléatoire sur le réseau triangulaire discuté à l'exercice 18 du chapitre 1. Vérifier que le résultat est le même que pour le réseau carré (universalité).
6. Calculer la limite du continu de la marche discrète unidimensionnelle de l'exercice 19 du chapitre 1. Montrer que la seule différence par rapport à la marche standard réside dans une valeur plus faible de la constante de diffusion (à normalisations égales de la variable temporelle). Faites de même pour la marche semi-discrète de l'exercice 20 du chapitre 1, et vérifier que la constante de diffusion est cette fois plus grande.
7. Considérer une marche pondérée définie par des probabilités de transition normalisées

$$p(m' \rightarrow m) = \frac{w(m)}{2dA(m')} \delta_{\langle m, m' \rangle}, \quad A(m') = \sum_{\langle m, m' \rangle} \frac{w(m)}{2d}. \quad (2.96)$$

Vérifier d'abord que l'équation différentielle discrète satisfaite par la distribution de position $P_0(m; N)$ (une vraie probabilité !) s'écrit

$$P_0(m; N + 1) = \frac{1}{2d} \sum_{\langle m', m \rangle} P_0(m'; N) + \sum_{\langle m', m \rangle} \left(\frac{w(m)}{A(m')} - \frac{1}{2d} \right) P_0(m'; N). \quad (2.97)$$

Etudier ensuite la limite d'échelle de la distribution, définie comme dans le cas non-perturbé par $P_0(x; t) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-d} P_0^{\text{disc}}(\frac{x}{a}; \frac{dt}{a^2})$, et montrer qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$\partial_t P_0(x; t) = \left[\frac{1}{2} \Delta + (\vec{\nabla} \log w(x))^2 - \frac{\Delta w(x)}{w(x)} - (\vec{\nabla} \log w(x)) \cdot \vec{\nabla} \right] P_0(x; t), \quad (2.98)$$

dans laquelle la fonction $w(x)$ est formellement définie par $\lim_{a \rightarrow 0} w(m = \frac{x}{a})$. Vérifier que pour le cas particulier $w(m) = |m|^\alpha$, qui favorise (si $\alpha > 0$) ou défavorise (si $\alpha < 0$) légèrement les sauts vers les sites qui sont plus éloignés de l'origine, l'équation se réduit à

$$\partial_t P_0(x; t) = \left[\frac{1}{2} \Delta + \frac{\alpha}{r^2} (1 - \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \right] P_0(x; t). \quad (2.99)$$

Effectuer une discussion de la solution de cette équation et/ou considérer des cas concrets.

Applications de la formule de Kac

8. Utiliser la formule de Kac pour montrer qu'en une dimension, la fraction de temps passé à droite de l'origine par la particule brownienne satisfait la loi de l'arcsinus. Considérer pour cela la fonction $\hat{u}(x; \alpha) = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} E_x[e^{-\beta \int_0^t \chi_0(x_s) ds}]$, où $\chi_0(x)$ est la fonction indicatrice de $[0, +\infty[$, et montrer que pour un départ à l'origine, on a $\hat{u}(0; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$. Déterminer finalement la distribution recherchée par une double transformée de Laplace inverse (consulter les tables).

9. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour redériver la distribution du temps de premier passage $P_0[\mathbf{m}_b > t]$ donnée en (2.24). (Indication: examiner la limite $\beta \rightarrow +\infty$ de la fonction $\hat{u}(x; \alpha)$ définie à l'exercice précédent. Utiliser l'invariance sous translation pour voir que $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \hat{u}(-b; \alpha) = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-b\sqrt{2\alpha}}]$ est la transformée de Laplace de la probabilité recherchée.)

10. (D'après C. Godrèche et J.M. Luck, *Statistics of the occupation time for a random walk in the presence of a moving boundary*, cond-mat/0106567)

Généraliser la loi de l'arcsinus de l'exercice 8 et calculer la distribution de la fraction de temps passée par une particule brownienne à droite d'une barrière qui se déplace à une vitesse v constante, étant entendu que la particule démarre de l'endroit où se trouve la barrière en $t = 0$. Montrer que la densité de probabilité d'y passer un temps s pendant un temps total t est donnée par $F^+(s, v)F^-(t - s, v)$, avec

$$F^\pm(\tau, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{v^2\tau}{2}} \mp \frac{v}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc}\left(\pm v\sqrt{\frac{\tau}{2}}\right), \quad (2.100)$$

où $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty du e^{-u^2}$.

(Indication: penser au mouvement brownien avec entraînement, exercice 4 !)

11. Considérer la fonction $E_x(e^{-\lambda\tau_S(t)})$ discutée à la section 2.9 (on a changé la signe du potentiel pour des raisons de convergence de la transformée de Laplace), avec pour S l'intervalle $[-b, b]$. La fonction $\tau_S(t)$ est le temps que passe la particule brownienne dans cet intervalle.

Montrer que si $\hat{u}(x; \alpha) = \mathcal{L}\{E_x(e^{-\lambda\tau_S(t)})\}$ est la transformée de Laplace de cette quantité, alors

$$\hat{u}(0; \alpha) = \frac{1}{\alpha + \lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{\alpha \cosh b\sqrt{2(\alpha + \lambda)} + \sqrt{\alpha(\alpha + \lambda)} \sinh b\sqrt{2(\alpha + \lambda)}} \right]. \quad (2.101)$$

En déduire

$$\mathcal{L}\{E_0[\tau_S(t)]\} = \frac{1}{\alpha^2} [1 - e^{-b\sqrt{2\alpha}}], \quad (2.102)$$

et par inversion de la transformée de Laplace, que la valeur moyenne du temps passé dans l'intervalle $[-b, b]$ vaut

$$E_0[\tau_S(t)] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} b e^{-b^2/2t} - b^2 + (t + b^2) \operatorname{erf}(b/\sqrt{2t}). \quad (2.103)$$

En conclure que pour t grand, cette valeur moyenne $E_0[\tau_S(t)] \sim \sqrt{\frac{8t}{\pi}} b$ croît comme \sqrt{t} (voir l'exercice 11 du chapitre 1).

De même, montrer que les deuxième et troisième moments se comportent asymptotiquement comme (le théorème taubérien pour la transformée de Laplace s'avère ici particulièrement précieux !)

$$E_0[\tau_S^2(t)] \sim 2b^2t, \quad E_0[\tau_S^3(t)] \sim 16\sqrt{\frac{2}{\pi}}(b^2t)^{3/2}. \quad (2.104)$$

Ces résultats contredisent-ils la discussion qualitative de la section 2.9, qui argumentait qu'en $d = 1$, la moyenne $E_0(e^{\lambda\tau_S(t)}) \sim e^{\alpha t}$ croît exponentiellement avec t (et non \sqrt{t}) ?

12. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour redériver la probabilité $P_0[\mathbf{m}_{-b}, \mathbf{m}_b > t]$ donnée à l'équation (2.33) et démontrée par la méthode des images.

Montrer que sa transformée de Laplace est égale à

$$\mathcal{L}\{P_0[\mathbf{m}_{-b}, \mathbf{m}_b > t]\} = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{1}{\cosh b\sqrt{2\alpha}} \right], \quad (2.105)$$

et l'inverser.

(Indication: s'inspirer de la résolution de l'exercice 9. Pour l'inversion de la transformée de Laplace, voir la section 2.10.)

13. Généraliser l'exercice 11 au cas du mouvement brownien unidimensionnel avec entraînement, de générateur $\Theta = -\frac{1}{2}d_x^2 - vd_x$ (voir l'exercice 4). Montrer que la transformée de Laplace du premier moment $\mathcal{L}\{E_x[\tau_S(t)]\}$ de la distribution du temps local dans $S = [-b, b]$ satisfait l'équation différentielle

$$\left[-\frac{1}{2}d_x^2 - vd_x + \alpha\right] \mathcal{L}\{E_x[\tau_S(t)]\} = \frac{1}{\alpha} \chi_{[-b,b]}(x). \quad (2.106)$$

En conclure que

$$\mathcal{L}\{E_0[\tau_S(t)]\} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{-b\sqrt{2\alpha+v^2}}}{\alpha^2} \left[\cosh bv + \frac{v}{\sqrt{2\alpha+v^2}} \sinh bv \right]. \quad (2.107)$$

Effectuer la transformée de Laplace inverse, et en étudier le comportement asymptotique pour des temps grands. Montrer que pour $v > 0$, la moyenne du temps local reste finie dans la limite $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_0[\tau_S(t)] = \frac{1}{2v^2} [1 + 2bv - e^{-2bv}]. \quad (2.108)$$

14. Reprendre les exercices 11 et 13 en deux dimensions pour un domaine S constitué d'un disque de rayon R centré à l'origine. Montrer que pour des temps asymptotiquement grands, le premier moment du temps local est donné par

$$E_0[\tau_S(t)] = \begin{cases} \frac{R^2}{2} [\log \frac{2t}{R^2} + 1 - 2\gamma] + \dots & \text{si } v = 0, \\ R^2 [I_0(Rv) K_0(Rv) + I_1(Rv) K_1(Rv)] & \text{si } v > 0, \end{cases} \quad (2.109)$$

où v est la norme de la vitesse d'entraînement, $\gamma = 0.577215\dots$ est la constante d'Euler, et I_n et K_n sont les fonctions de Bessel modifiées.

Deux voies sont possibles pour obtenir ces résultats. La première est la formule de Kac pour la transformée de Laplace du premier moment. Dans cette approche, montrer que

$$\mathcal{L}\{E_0[\tau_S(t)]\} = \frac{2R}{\alpha} \int_0^\infty dk \frac{J_1(kR)}{\sqrt{(k^2 + 2\alpha)^2 + 4v^2 k^2}}, \quad (2.110)$$

où $J_1(z)$ est la fonction de Bessel. Utiliser ensuite le théorème taubérien pour dériver les comportements de $E_0[\tau_S(t)]$ donnés ci-dessus.

L'autre voie d'attaque, d'ailleurs possible aussi pour le problème unidimensionnel, consiste à écrire le premier moment comme une double intégrale de la distribution de position (cfr la formule (1.67))

$$E_0[\tau_S(t)] = \int_S d^2x \int_0^t ds P_0(\vec{x}; s). \quad (2.111)$$

15. (S.N. Majumdar et A. Comtet, *Airy distribution function: from the area under a Brownian excursion to the maximal height of fluctuating interfaces*, [cond-mat/0409566](#))

Etudier la distribution de l'aire en-dessous d'une trajectoire brownienne, stoppée au moment où elle revient à l'origine pour la première fois.

16. Reprendre les calculs de la section 10 et l'adapter au cas où b est négatif. Il s'agit donc de calculer la distribution de probabilité du temps passé sur la partie positive de l'axe réel avant d'atteindre un point négatif de l'axe réel, c'est-à-dire la distribution de $|\{s \leq \mathbf{m}_{-b} : \omega_s \geq 0\}|$, pour $b > 0$. Montrer que

$$P_0[|\{s \leq \mathbf{m}_{-b} : \omega_s \geq 0\}| \in dt] = \frac{1}{\sqrt{2b}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{e^{t/2b^2}}{\sqrt{2b}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{2b^2}}\right) \right] dt. \quad (2.112)$$

Le graphe de cette distribution pour $b = 1$ est donné à la figure 4, section 2.10. Quelle peut être l'origine de la singularité à l'origine, en $\frac{1}{\sqrt{t}}$?

17. Pour le processus de Bessel en $d = 2$, utiliser la formule de Kac pour calculer les transformées de Laplace des temps de premier passage en R partant de r , et en r partant de R , avec $r < R$:

$$E_r[e^{-\alpha m_R}] = \frac{I_0(\sqrt{2\alpha}r)}{I_0(\sqrt{2\alpha}R)}, \quad E_R[e^{-\alpha m_r}] = \frac{K_0(\sqrt{2\alpha}R)}{K_0(\sqrt{2\alpha}r)}, \quad (2.113)$$

où I_0 et K_0 sont les deux fonctions de Bessel modifiées linéairement indépendantes d'ordre 0.

Processus de Markov non-brownien

18. Considérer en une dimension le processus de Markov $(q_t)_{t \geq 0}$ correspondant au générateur

$$\Theta = -\frac{1}{2}d_x^2 + x d_x. \quad (2.114)$$

- a. Vérifier que les distributions de position du processus, satisfaisant $-\partial_t P_x(y; t) = \Theta_x P_x(y; t)$, $P_x(y; 0) = \delta(x - y)$, sont données par

$$P_x(y; t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left\{-\frac{(e^{-t}x - y)^2}{1 - e^{-2t}}\right\}. \quad (2.115)$$

Montrer qu'elles satisfont également $-\partial_t P_x(y; t) = \Theta_y^\dagger P_x(y; t)$, avec

$$\Theta^\dagger = -\frac{1}{2}d_x^2 - x d_x - 1, \quad (2.116)$$

l'adjoint de Θ . Vérifier que ces distributions sont correctement normalisées, en calculant que $\int dy P_x(y; t) = 1$.

- b. Montrer ensuite que ces distributions sont intimement liées au problème de l'oscillateur harmonique $V(x) = \frac{x^2}{2}$, en montrant que $K(y, x; t) = e^{(y^2 - x^2)/2} P_x(y; t)$ est le noyau de l'opérateur d'évolution e^{-tH} pour $H = -\frac{1}{2}d_x^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$, le hamiltonien de l'oscillateur harmonique, normalisé de telle sorte que la valeur propre de l'état fondamental soit nulle. Il suffit pour cela que vérifier que

$$-\partial_t K(y, x; t) = HK(y, x; t), \quad K(y, x; 0) = \delta(x - y). \quad (2.117)$$

Observer finalement que le facteur reliant $K(y, x; t)$ à $P_x(y; t)$ est égal à $\frac{\psi_0(x)}{\psi_0(y)}$, où $\psi_0(z) = e^{-z^2/2}$ est l'état fondamental de H , et que l'origine de ce facteur tient de la relation de conjugaison $\Theta = e^{x^2/2} H e^{-x^2/2}$.

19. Montrer que pour le processus de l'oscillateur de l'exercice précédent, on a

$$E_x(q_t) = x e^{-t}, \quad (2.118)$$

$$E_x(q_s q_t) - E_x(q_s) E_x(q_t) = e^{-\max(s, t)} \sinh[\min(s, t)]. \quad (2.119)$$

MARCHES ALÉATOIRES PERTURBÉES

On a jusqu'ici traité quasi-exclusivement des marches aléatoires symétriques, standards, dans le discret et dans le continu, et déterminé leurs propriétés essentielles (diffusives notamment). Ce travail est l'équivalent de l'étude d'une particule libre en mécanique quantique, ou du champ libre en théorie des champs. Celles-ci servent souvent de base à l'étude de théories en interaction, via une théorie de perturbations.

On se propose dans ce dernier chapitre d'adopter la même démarche pour explorer les propriétés de marches non-standards, vues comme des marches standards perturbées. La question fondamentale est de préciser, et dans notre cas d'illustrer surtout, de quelle façon les propriétés de marches perturbées diffèrent de celles des marches standards.

Les perturbations que l'on va considérer sont celles que nous avons introduites plus tôt à travers les facteurs de pondérations dans les probabilités de transition. Nous les traiterons de la façon expliquée à la fin du premier chapitre, c'est-à-dire que nous utiliserons les probabilités de transitions non normalisées

$$T_{\vec{m},\vec{n}} \equiv p(\vec{n} \rightarrow \vec{m}) = \frac{w(\vec{m})}{2d} \delta_{\langle \vec{m},\vec{n} \rangle}. \quad (3.1)$$

Ignorant le problème de la normalisation, on en a tiré des pseudo-distributions $P_0^w(\vec{m}; N)$, satisfaisant une équation différentielle

$$P_0^w(\vec{m}; N) = \sum_{\vec{n}} T_{\vec{m},\vec{n}} P_0^w(\vec{n}; N-1) = \sum_{\vec{n}} (T^N)_{\vec{m},\vec{n}} P_0^w(\vec{n}; 0) = (T^N)_{\vec{m},0}. \quad (3.2)$$

Nous dénoterons par $Z_N = \sum_{\vec{m}} P_0^w(\vec{m}; N)$ la normalisation de $P_0^w(\vec{m}; N)$.

La distribution qui nous intéressera par la suite est la (vraie) distribution de probabilité $P_0^w(\vec{m}; N)/Z_N$, correctement normalisée. Sa forme explicite est donnée en termes des poids par

$$\frac{P_0^w(\vec{m}; N)}{Z_N} = \frac{1}{Z_N} \sum_{\omega: 0 \rightarrow \vec{m}} \prod_{i=1}^N \frac{w(\vec{\omega}(i))}{2d}. \quad (3.3)$$

La relation de ces distributions aux processus stochastiques définis par les poids w a déjà été discutée aux chapitres 1 et 2. Nous rappellerons simplement que cette procédure définit une certaine perturbation des marches standards, équivalente à placer la particule brownienne dans un potentiel.

Nous ne ferons pas une étude générale des perturbations de ce type, mais nous nous concentrerons dans tout ce chapitre sur un exemple simple et concret, correspondant à une perturbation minimale, localisée à l'origine:

$$w(\vec{m}) = 1 + (e^\beta - 1) \delta_{\vec{m},0} = e^{\beta \delta_{\vec{m},0}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{m} \neq 0, \\ e^\beta & \text{si } \vec{m} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

La probabilité de sauter vers un site plus proche voisin vaut donc $\frac{1}{2d}$ comme pour les marches standards, sauf s'il s'agit d'un saut vers l'origine, auquel cas la probabilité relative vaut $\frac{e^\beta}{2d}$. Dépendant du signe de β , cette probabilité est inférieure ou supérieure à $\frac{1}{2d}$.

La matrice T correspondante vaut

$$T(\beta)_{\vec{m},\vec{n}} = \frac{e^{\beta \delta_{\vec{m},0}}}{2d} \delta_{\langle \vec{m},\vec{n} \rangle}, \quad (3.5)$$

et égale la matrice non-perturbée $T(0)$ dont on a multiplié la ligne de l'origine par e^β .

La distribution de probabilité (3.3) devient simplement

$$\frac{P_0^\beta(\vec{m}; N)}{Z_N(\beta)} = \sum_{\omega: 0 \rightarrow \vec{m}} \frac{e^{\beta \#(\text{retours en } 0)}}{(2d)^N Z_N(\beta)}. \quad (3.6)$$

La perturbation encourage donc, ou décourage selon le cas, le marcheur à visiter l'origine. Mais pour visiter l'origine, il doit préalablement se trouver dans son voisinage, ce qui implique qu'effectivement la perturbation n'affecte la marche que lorsque le marcheur se trouve près de l'origine. Les effets d'une telle perturbation sur les propriétés globales de la marche ne sont pas évidents a priori.

On peut néanmoins s'attendre à des effets qui dépendent de la dimensionnalité de l'espace. En $d = 1, 2$, la marche standard est récurrente. Le marcheur revient une infinité de fois à l'origine, et a donc plus de chances de sentir l'effet de la perturbation qu'en dimension supérieure. Une première analyse permet de confirmer ce point.

3.1 PREMIÈRE ANALYSE: FORMULATION DISCRÈTE

Une première manière de mesurer l'effet de la perturbation à l'origine définie plus haut est de calculer la normalisation $Z_N(\beta)$, que nous appellerons aussi la fonction de partition,

$$Z_N(\beta) = \sum_{\omega: |\omega|=N} \frac{1}{(2d)^N} e^{\beta \#(\text{retours en } 0)}. \quad (3.7)$$

Notons que cette normalisation peut également s'exprimer comme $E_0[e^{\beta \tau(0,N)}]$, où $\tau(0, N)$ est le temps passé à l'origine pendant un temps total N (un temps local), et où la moyenne est calculée par rapport à la marche standard. On rejoint donc le cadre du problème discuté à la section 2.9 (existence ou non d'un état lié pour un potentiel attractif); les conclusions auxquelles on va parvenir dans un instant vont bien sûr dans le même sens.

On considère également la fonction suivante (l'énergie interne en mécanique statistique)

$$\begin{aligned}
u(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{d}{d\beta} \log Z_N(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1}{Z_N(\beta)} \frac{d}{d\beta} Z_N(\beta) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\omega : |\omega|=N} \#(\text{retours en } 0) \frac{e^{\beta \#(\text{retours en } 0)}}{(2d)^N Z_N(\beta)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_0^\beta[\#(\text{retours en } 0 \text{ pendant } N)]. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

La moyenne E_0^β est calculée cette fois par rapport aux distributions $P_0^\beta(\vec{m}; N)/Z_N(\beta)$.

Pour $\beta = 0$, le nombre de retours à l'origine augmente comme \sqrt{N} (en $d = 1$), $\log N$ (en $d = 2$) et reste borné en $d \geq 3$, ce qui implique dans tous les cas $u(0) = 0$. Si $\beta < 0$, la marche perturbée décourage les visites à l'origine, et donc a fortiori $u(\beta) = 0$ pour $\beta < 0$.

Restent les valeurs positives de β , pour lesquelles on pourrait avoir $u(\beta) > 0$, au moins pour β suffisamment grand. Si c'est le cas, la perturbation modifie de manière très significative les propriétés de la marche, puisqu'une valeur non-nulle de $u(\beta)$ indique que le marcheur passe à l'origine une fraction de temps considérablement plus longue, linéaire en N , que ce qu'il ne fait dans le cas de la marche non-perturbée. Remarquons que cet argument n'exclut pas le fait que les propriétés soient également modifiées pour $\beta < 0$, mais simplement le calcul de $u(\beta)$ ne permet pas de l'établir. (On montrera plus loin qu'elles le sont effectivement en dimension $d < 2$.)

Par une formule précédente, on a

$$Z_N(\beta) = \sum_{\vec{m}} (T^N)_{\vec{m},0}, \quad \text{avec } T_{\vec{m},\vec{n}} = \frac{e^{\beta \delta_{\vec{m},0}}}{2d} \delta_{\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle}. \tag{3.9}$$

La méthode des graphes de la section 1.1 nous a déjà montré comment les éléments de matrice d'une puissance de T pouvaient être calculés. Introduisant une décomposition spectrale de $T = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$, avec P_λ le projecteur sur le sous-espace propre de T de valeur propre λ , T^N est dominé dans la limite des grands N par l'action de T dans les sous-espaces propres de valeurs propres maximales, $T^N \sim \sum_{\lambda : |\lambda|_{\max}} \lambda^N P_\lambda$. On déduit alors que $\frac{1}{N} \log Z_N \rightarrow \log |\lambda_{\max}|$, et ensuite la fonction $u(\beta) = \frac{d}{d\beta} \log |\lambda_{\max}(\beta)|$, où λ_{\max} est une des valeurs propres de norme maximale.

Dans le cas qui nous intéresse, cette procédure pose quelques questions. D'abord, notre matrice T est de dimension infinie, et peut avoir un spectre continu, avec des valeurs propres infiniment dégénérées. D'ailleurs, la question de savoir dans quel espace on doit rechercher les vecteurs propres devrait être posée. Finalement la décomposition spectrale elle-même de T peut être mise en cause.

Les problèmes liés à la dimension infinie de T peuvent être facilement résolus, exactement comme dans la section 1.1. On examine la marche pendant un temps N , au bout duquel le marcheur ne peut être sorti d'un cube \mathcal{C}_N de côtés $2N + 1$ centré à l'origine (tout au plus aura-t-il atteint un bord du cube). On peut donc sans mal considérer la restriction de T à

\mathcal{C}_N plutôt que T elle-même, tout en remarquant que la matrice finie que l'on obtient a une dimension qui croît avec N (comme N^d). On a ainsi une famille de matrices de dimension croissante. Les quantités $Z_N(\beta)$ et $u(\beta)$ calculées à partir d'elles sont des fonctions bien définies de β , dont on doit examiner la limite pour $N \rightarrow \infty$ (d'après (3.8), la limite existe, et est comprise entre 0 et 1).

Reste un dernier point. Les restrictions de $T(\beta)$ aux cubes \mathcal{C}_N sont finies, mais pour utiliser l'expression de u en termes de $|\lambda_{\max}|$, on a supposé des propriétés de diagonalisabilité (bien que cela ne soit pas nécessaire). Malgré le fait que les restrictions de $T(\beta)$ aux cubes \mathcal{C}_N ne soient pas des matrices normales si $\beta > 0$, le petit argument qui suit montre qu'elles sont néanmoins diagonalisables, au sens qu'il existe un changement de base qui les rend diagonales (les projecteurs sur les espaces propres ne sont pas orthogonaux).

Définissons la matrice $S(\beta)$ en multipliant la colonne de l'origine de $T(\beta)$ par e^β

$$S(\beta)_{\vec{m}, \vec{n}} = T(\beta)_{\vec{m}, \vec{n}} e^{\beta \delta_{\vec{n}, 0}} = e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}} T(0)_{\vec{m}, \vec{n}} e^{\beta \delta_{\vec{n}, 0}}, \quad (3.10)$$

et ses restrictions aux cubes \mathcal{C}_N . Chaque restriction de $S(\beta)$ est manifestement symétrique, et donc diagonalisable par une matrice orthogonale. Soit v_λ un de ses vecteurs propres. Multipliant par $e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}}$ l'équation aux valeurs propres satisfaite par v_λ , on trouve

$$\begin{aligned} \lambda(\beta) e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}} v_\lambda(\vec{m}) &= \sum_{\vec{n}} e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}} S(\beta)_{\vec{m}, \vec{n}} v_\lambda(\vec{n}) \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathcal{C}_N} e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}} S(\beta)_{\vec{m}, \vec{n}} e^{-\beta \delta_{\vec{n}, 0}} e^{\beta \delta_{\vec{n}, 0}} v_\lambda(\vec{n}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

qui montre que $e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}} v_\lambda(\vec{m})$ est vecteur propre de $e^{\beta \delta_{\vec{m}, 0}} S(\beta)_{\vec{m}, \vec{n}} e^{-\beta \delta_{\vec{n}, 0}} = T(2\beta)_{\vec{m}, \vec{n}}$, de valeur propre $\lambda(\beta)$. Chaque vecteur propre de $S(\beta)|_{\mathcal{C}_N}$ donne lieu à un vecteur propre de $T(2\beta)|_{\mathcal{C}_N}$, qui est par conséquent diagonalisable pour n'importe quelle valeur de β . De plus le spectre de $T(\beta)|_{\mathcal{C}_N}$ est réel puisqu'il est égal à celui de $S(\frac{\beta}{2})|_{\mathcal{C}_N}$, lui-même réel (car S est symétrique réelle). Ceci implique en particulier que le maximum de $|\lambda|$ est atteint pour au plus deux valeurs propres λ de $T(\beta)|_{\mathcal{C}_N}$. Nous écrivons λ_{\max} pour celle qui est positive.

On peut donc légitimement écrire notre fonction u comme

$$u(\beta) = \frac{d}{d\beta} \log \lambda_{\max}(\beta), \quad (3.12)$$

où $\lambda_{\max}(\beta)$ doit être compris comme la limite, pour $N \rightarrow \infty$, de la valeur propre maximale positive de $T(\beta)|_{\mathcal{C}_N}$.

L'équation (3.8) montre que $u(\beta)$ est positive ou nulle, et non décroissante. On a $u(0) = 0$, et dans le régime extrême $\beta \rightarrow \infty$, on trouve $u(+\infty) = \frac{1}{2}$. En effet, partant de l'origine, le marcheur saute en $\pm e_i$, et l'instant d'après, revient nécessairement à l'origine, puisque la probabilité relative des autres sauts est nulle. Il passe donc la moitié de son temps à l'origine. Entre ces deux valeurs limites, on conclut qu'il doit exister une valeur critique $\beta_c \geq 0$ telle que u sera nulle à gauche de β_c et non-nulle à droite de β_c .

Pour $\beta = 0$, on a $\lambda_{\max}(0) = 1$. Effectivement, d'après (1.26), la valeur propre maximale positive de la restriction de $T(0)$ à un cube de côté $2N+1$ est donnée par $\frac{1}{d} \sum_i \cos \frac{\pi}{2(N+1)} < 1$, strictement plus petite que 1 pour tout N fini, mais qui tend vers 1. Puisque $u(\beta) \geq 0$, $\log \lambda_{\max}(\beta)$ et donc $\lambda_{\max}(\beta)$ sont des fonctions non-décroissantes, et il s'ensuit que $\lambda_{\max}(\beta) \geq 1$ pour toute valeur de β positive.

Par conséquent, nous obtenons que la condition nécessaire pour avoir $u(\beta)$ non-nulle est donc d'avoir $\lambda_{\max}(\beta) > 1$. Il reste à voir si une telle valeur propre existe, et sous quelles conditions. Nous ferons le calcul directement sur la matrice $T(\beta)$ infinie.

L'équation aux valeurs propres pour les vecteurs propres (à droite) de T s'écrit

$$(T(\beta)v_\lambda)_{\vec{m}} = \frac{e^{\beta\delta_{\vec{m},0}}}{2d} \sum_{i=1}^d [v_\lambda(\vec{m} + \vec{e}_i) + v_\lambda(\vec{m} - \vec{e}_i)] = \lambda v_\lambda(\vec{m}), \quad (3.13)$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [v_\lambda(\vec{m} + \vec{e}_i) + v_\lambda(\vec{m} - \vec{e}_i)] - \lambda v_\lambda(\vec{m}) = (e^{-\beta} - 1) \lambda v_\lambda(0) \delta_{\vec{m},0}. \quad (3.14)$$

Insérant les transformées de Fourier de $v_\lambda(\vec{m})$ et de $\delta_{\vec{m},0}$,

$$v_\lambda(\vec{m}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} c(\varphi) e^{i\vec{m} \cdot \vec{\varphi}} \quad \text{et} \quad \delta_{\vec{m},0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{i\vec{m} \cdot \vec{\varphi}}, \quad (3.15)$$

on trouve

$$\left(\frac{1}{d} \sum_i \cos \varphi_i - \lambda \right) c(\varphi) = (e^{-\beta} - 1) \lambda v_\lambda(0) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}. \quad (3.16)$$

Observons maintenant qu'un vecteur propre ayant $v_\lambda(0) = 0$ est aussi vecteur propre de la matrice $T(0)$, c'est-à-dire un vecteur propre pour la situation non-perturbée (puisque toute dépendance en β disparaît). Or dans ce cas, toutes les valeurs propres sont inférieures ou égales à 1. Dès lors, $\lambda > 1$ requiert $v_\lambda(0) \neq 0$.

Si $v_\lambda(0) \neq 0$, la fonction $c(\varphi)$ est complètement déterminée en fonction de λ , ce qui détermine univoquement le vecteur propre lui-même (et implique que toute valeur propre $\lambda > 1$ est non-dégénérée). On obtient ainsi une équation de compatibilité

$$v_\lambda(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} c(\varphi) = (e^{-\beta} - 1) \lambda v_\lambda(0) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{\frac{1}{d} \sum_i \cos \varphi_i - \lambda}, \quad (3.17)$$

ou encore

$$f(\beta) \equiv \frac{1}{1 - e^{-\beta}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \frac{1}{d\lambda} \sum_i \cos \varphi_i} \equiv I(\lambda). \quad (3.18)$$

L'égalité des deux fonctions fixe la ou les valeurs de $\lambda > 1$ en termes de β .

La fonction f est strictement décroissante entre $f(0^+) = +\infty$ et $f(+\infty) = 1$. Il n'est pas difficile de voir (en dérivant par exemple) que $I(\lambda)$ l'est également sur le domaine $\lambda > 1$, et qu'elle varie entre $I(1)$ et $I(+\infty) = 1$. Il s'ensuit que $f(\beta)$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty]$, chaque valeur étant prise une seule fois, et que $I(\lambda)$ prend ses valeurs dans $[1, I(1)]$, chaque étant prise une seule fois également. Cela implique qu'il existe au plus une solution $\lambda > 1$ satisfaisant $f(\beta) = I(\lambda)$. S'il en existe une, c'est la valeur propre λ_{\max} que l'on cherche.

Finalement le dernier élément qui nous manque encore pour terminer la discussion est la valeur de la fonction $I(\lambda)$ en $\lambda = 1$. La valeur de l'intégrale $\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} I(\lambda)$ a déjà été discutée à la section 1.6 —on l'avait appelée $G(0)$, et c'est elle qui déterminait la récurrence ou transience des marches— avec le résultat que cette valeur vaut $+\infty$ si $d \leq 2$ et qu'elle est finie si $d > 2$.

On en tire les conclusions suivantes, dépendantes de la dimension:

$d \leq 2$ $f(\beta) = I(\lambda)$ possède toujours une solution unique $\lambda = \lambda(\beta) > 1$ quelle que soit la valeur de $\beta > 0$. On obtient donc que $u(\beta) > 0$ pour tout $\beta > 0$: le marcheur reste accroché à l'origine, aussi faible que soit la perturbation, puisqu'il y passe un temps proportionnel à N . La moindre perturbation change drastiquement les propriétés de la marche.

$d > 2$ $f(\beta) = I(\lambda)$ ne possède une solution unique que si $\beta \geq \beta_c$ est supérieure à une valeur critique déterminée par $(1 - e^{-\beta_c})^{-1} = I(1)$. On a alors $u(\beta) = 0$ pour $\beta \leq \beta_c$, et $u(\beta) > 0$ pour $\beta > \beta_c$. Il y a dans ce cas une *transition d'accrochage* à $\beta = \beta_c > 0$: la marche ne semble subir aucune influence de la perturbation tant que β reste petit, et par contre, au-delà d'une valeur seuil β_c , elle devient "accrochée" à l'origine et y passe un temps proportionnel à N .

A titre d'illustration, la valeur $G(0) = 1.52$ mentionnée en $d = 3$ montre que $e^{\beta_c} \sim 3$: il y aura accrochage si la probabilité de sauter vers l'origine est au moins trois fois plus grande que celle de sauter vers l'un des 5 autres sites voisins.

Nous aurons l'occasion dans la suite de confirmer ces résultats par d'autres méthodes.

Pour $d = 1$, on peut donner des expressions tout à fait concrètes et explicites. Par résidus (par exemple), on trouve d'abord

$$I(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda} \cos \varphi} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}}. \quad (3.19)$$

Egalant cette expression à $f(\beta)$, on tire l'unique solution $\lambda > 1$

$$\lambda_{\max}(\beta) = \frac{e^\beta}{\sqrt{2e^\beta - 1}}, \quad (3.20)$$

de laquelle on calcule la fonction u , représentant la fraction moyenne de temps passé à l'origine:

$$u(\beta) = \frac{1 - e^{-\beta}}{2 - e^{-\beta}}. \quad (3.21)$$

On retrouve la valeur asymptotique $u(+\infty) = \frac{1}{2}$ discutée plus haut.

La distribution de la marche perturbée vaut $P_0^\beta(m; N)/Z_N(\beta)$, dont la valeur asymptotique lorsque N tend vers l'infini est donnée par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_0^\beta(m; N)}{Z_N(\beta)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(T(\beta)^N)_{m,0}}{\sum_m (T(\beta)^N)_{m,0}} = \frac{v_{\max}(m)}{\sum_m v_{\max}(m)}, \quad (3.22)$$

où l'on a utilisé la décomposition spectrale de $T(\beta)$: $T(\beta)_{m,n} = \sum_\lambda \lambda v_\lambda(m) w_\lambda(n)$, avec les v_λ et w_λ les vecteurs propres à droite et à gauche respectivement, normalisés par $w_\lambda \cdot v_{\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$.

L'équation (3.16) permet de calculer le vecteur propre à droite de valeur propre maximale (normalisé à $v_{\max}(0) = 1$):

$$v_{\max}(m) = (1 - e^{-\beta}) \lambda_{\max} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2\pi)} \frac{e^{im\varphi}}{\lambda_{\max} - \cos \varphi} = (\lambda_{\max} e^{-\beta})^{|m|}. \quad (3.23)$$

La somme de ses composantes donne $\sum_m v_{\max}(m) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}+1}{\lambda_{\max}-1}}$.

On obtient finalement la distribution asymptotique recherchée

$$\frac{P_0^\beta(m; \infty)}{Z_\infty(\beta)} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}-1}{\lambda_{\max}+1}} (\lambda_{\max} e^{-\beta})^{|m|}. \quad (3.24)$$

L'accrochage est clair: cette distribution asymptotique n'est pas nulle partout (comme dans le cas non-perturbé), conséquence du fait que le marcheur ne diffuse plus: la distance moyenne à laquelle il s'éloigne de son point de départ reste bornée dans le temps.

Le cas bidimensionnel est brièvement examiné dans les exercices.

3.2 FORMULATION CONTINUE

Les calculs qui précèdent ont permis de se faire une première idée des comportements auxquels on peut s'attendre lorsque l'on met une perturbation attractive à l'origine. Des calculs explicites doivent être effectués pour avoir une description complète, en particulier dans le régime répulsif ($\beta < 0$). Pour cela, une formulation continue est plus commode, et donne de toutes manières des résultats équivalents à ceux de la formulation discrète dans son régime asymptotique de grands temps, qui est bien le régime qui nous intéresse (les changements de propriétés diffusives ne peuvent s'observer que sur des très longs moments).

La limite du continu des marches pondérées a été discutée au chapitre 2. L'effet des poids w est représenté par un potentiel V , donné par

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{-2} [w(\frac{x}{a}) - 1] = -\frac{1}{d} V(x), \quad (3.25)$$

ou encore par $w(\frac{x}{a}) \sim e^{-a^2 V(x)/d}$.

Les pseudo-distributions discrètes $P_0^w(\vec{m}; N)$ tendent vers $P_0^V(\vec{x}; t)$, elles-mêmes données par l'équation (2.66)

$$P_0^V(\vec{x}; t) = E_0 \left\{ e^{-\int_0^t V(\omega_s) ds} \delta(\omega_t - \vec{x}) \right\}, \quad (3.26)$$

où la moyenne est effectuée par rapport au mouvement brownien standard (voir la section 2.7).

Pour la perturbation qui nous occupe, on a, en utilisant $\delta(\frac{x}{a}) = |a|^d \delta(x)$,

$$w(\frac{x}{a}) = e^{\beta \delta(x/a)} = e^{a^d \beta \delta(x)} = e^{a^d (\frac{1}{d} a^{2-d} b) \delta(x)} = e^{\frac{a^2 b}{d} \delta(x)}, \quad (3.27)$$

ce qui amène au potentiel

$$V(x) = -b \delta(x), \quad (3.28)$$

attractif si $b > 0$, répulsif si $b < 0$. Nous dénoterons par $P_0^b(x; t)$ les pseudo-distributions associées.

On notera que la limite d'échelle s'est accompagnée d'une redéfinition (un scaling !) de la constante de couplage β , donnée par $\beta = \frac{1}{d} a^{2-d} b$, où b devient la constante de couplage effective dans la théorie continue. Les trois variables discrètes m, N et β sont données en fonction du paramètre d'échelle a et des variables continues par

$$m = \frac{x}{a} \quad N = \frac{dt}{a^2}, \quad \beta = \frac{1}{d} \frac{b}{a^{d-2}}. \quad (3.29)$$

Ces simples relations d'échelle sont d'une importance extrême, parce qu'elles relient, à travers a , les échelles de temps, d'espace et de constante de couplage. Puisque que β est un nombre pur, elles montrent en particulier que la constante de couplage b dans le continu acquiert une dimension, que l'on peut exprimer en termes de longueur ou de temps, et égale à $[b] = L^{d-2}$ ou $T^{\frac{d-2}{2}}$. Les conséquences de cette innocente remarque sont considérables. On peut sans exagérer dire que *les caractéristiques du régime asymptotique des marches perturbées que l'on s'apprête à établir sont fondamentalement liées à la dimension de b* (elle est sans dimension si $d = 2$, ce qui laisse déjà entrevoir un comportement particulier pour cette valeur de d).

Pour s'en rendre compte, observons que la définition de la limite du continu et les relations d'échelle (3.29) impliquent que les processus correspondant à différentes valeurs de b sont reliés par la relation d'échelle⁸

$$\lambda^d P_0^{b\lambda^{d-2}}(\lambda x; \lambda^2 t) = P_0^b(x; t), \quad \forall \lambda > 0, \quad (3.30)$$

parce que les différentes dilatations par λ peuvent être absorbées dans une contraction de a . La relation précédente est équivalente à

$$\lambda^d P_0^b(\lambda x; \lambda^2 t) = P_0^{b\lambda^{2-d}}(x; t). \quad (3.31)$$

Celle-ci montre qu'un changement d'échelle d'espace et de temps dans la marche de constante de couplage b revient à passer à la marche de constante de couplage $b\lambda^{2-d}$. Par conséquent

⁸Cette relation n'est pas une invariance d'échelle sauf si $b = 0$ ou $d = 2$, puisqu'elle implique deux processus différents.

étudier le régime asymptotique pour des distances et des temps de plus en plus grands ($\lambda > 1$), c'est étudier une marche contrôlée par une constante de couplage qui devient de plus en plus petite ou de plus en plus grande.

Effectivement, si $d > 2$, une dilatation de l'espace et du temps est équivalente à une contraction de b . Lorsqu'on effectue des dilatations successives pour se rapprocher du régime asymptotique, la constante de couplage tend vers 0, et on s'attend donc à ce que le régime asymptotique en $d > 2$ soit celui correspondant à $b = 0$, la marche non-perturbée, c'est-à-dire le mouvement brownien. On dira dans ce cas que la perturbation (ou la constante de couplage qui en contrôle l'intensité) est irrelevante.

Si $d < 2$, on a à l'inverse que la constante de couplage grandit, lorsqu'on regarde la marche pour des temps de plus en plus grands. Cette fois, l'effet de la perturbation ne disparaît pas dans le régime asymptotique, et on s'attend à ce que celui-ci soit véritablement différent de celui du mouvement brownien. On dira que la constante de couplage b est une variable relevante.

En deux dimensions, où le couplage ne change pas (à ce niveau d'analyse), la constante est dite marginale.

Ces arguments relativement naïfs, basés sur une simple analyse dimensionnelle, confirment qualitativement les résultats obtenus dans la première section. Les sections qui suivent tendent justement à les préciser et les raffiner, dans le but d'obtenir des informations quantitatives.

3.3 CALCULS EXPLICITES EN UNE DIMENSION

En une dimension, le calcul de $P_0^b(x; t)$ dans le formalisme continu peut être mené jusqu'au bout.

L'objectif est donc de calculer

$$P_0^b(x; t) = E_0 \left\{ e^{b \int_0^t \delta(\omega_s) ds} \delta(\omega_t - x) \right\}, \quad (3.32)$$

ou de façon équivalente, sa transformée de Fourier

$$I(k; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} P_0^b(x; t) = E_0 \left\{ e^{ik\omega_t} e^{b \int_0^t \delta(\omega_s) ds} \right\}. \quad (3.33)$$

Développant l'exponentielle qui contient le potentiel, on a

$$I(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \int_{0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t} ds_1 \dots ds_n E_0 \left\{ \delta(\omega_{s_1}) \dots \delta(\omega_{s_n}) e^{ik\omega_t} \right\}. \quad (3.34)$$

La quantité à calculer est la valeur moyenne de e^{iky} sur les chemins browniens qui démarrent en 0, arrivent en y au temps t après être revenu en 0 aux temps s_1, s_2, \dots, s_n . Utilisant la

propriété de Markov du mouvement brownien ainsi que la forme explicite de la mesure de Wiener, on a

$$\begin{aligned} E_0 \left\{ \delta(\omega_{s_1}) \dots \delta(\omega_{s_n}) e^{ik\omega_t} \right\} &= P_0(0; s_1) \dots P_0(0; s_n - s_{n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky} P_0(y; t - s_n) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^{-1/2} e^{-(t-s_n)k^2/2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Replaçant cette expression dans $I(k; t)$, et après le changement de variables $t_i = s_i - s_{i-1}$ ($s_0 \equiv 0$), de jacobien égal à 1, on obtient

$$I(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_0^{\infty} dt_1 \dots dt_n \chi_0(t - \sum_i t_i) \left(\prod_{i=1}^n t_i^{-1/2} \right) e^{-\frac{k^2}{2}(t - \sum_i t_i)}. \quad (3.36)$$

La fonction $\chi_0(x)$, égale à 0 si x est négatif et à 1 si x est positif, prend en compte la contrainte $s_n \leq t$. Dans la somme ci-dessus, le terme $n = 0$ est simplement $e^{-k^2 t/2}$.

La transformée de Laplace \mathcal{L} sur t du n -ème terme de la série donne

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} \int_0^{\infty} dt_1 \dots dt_n \chi_0(t - \sum_i t_i) \left(\prod_{i=1}^n t_i^{-1/2} \right) e^{-\frac{k^2}{2}(t - \sum_i t_i)} \\ &= \int_0^{\infty} dt_1 \dots dt_n \left(\prod_{i=1}^n t_i^{-1/2} \right) e^{-\alpha \sum_i t_i} \int_{\sum_i t_i}^{\infty} dt e^{-(\alpha + \frac{k^2}{2})(t - \sum_i t_i)} \\ &= \frac{1}{\alpha + \frac{k^2}{2}} \left[\int_0^{\infty} dt_1 \frac{e^{-\alpha t_1}}{\sqrt{t_1}} \right]^n = \frac{1}{\alpha + \frac{k^2}{2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)^n. \end{aligned} \quad (3.37)$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} I(k; t) &= e^{-k^2 t/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right)^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\alpha + \frac{k^2}{2}) \alpha^{\frac{n}{2}}} \right\} \\ &= e^{-k^2 t/2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\alpha + \frac{k^2}{2}) (\sqrt{\alpha} - \frac{b}{\sqrt{2}})} \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Effectuant la transformée de Fourier inverse, pour laquelle on utilisera $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + m^2} = \frac{e^{-m|x|}}{2m}$ (le vérifier par résidus !), on obtient la distribution elle-même

$$P_0^b(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} + \frac{b}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|x|}}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - \frac{b}{\sqrt{2}})} \right\}. \quad (3.39)$$

Les tables de transformée de Laplace (ou une vérification directe) nous permettent finalement d'écrire la distribution explicite

$$P_0^b(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{b}{2} e^{-b|x| + \frac{b^2 t}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x| - bt}{\sqrt{2t}} \right), \quad (3.40)$$

où la fonction $\operatorname{erfc}(z)$ est l'intégrale gaussienne incomplète définie par $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty du e^{-u^2}$.

La normalisation (la fonction de partition) s'obtient sans problème et vaut

$$Z_t(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx P_0^b(x; t) = e^{b^2 t/2} \operatorname{erfc}\left(-b\sqrt{\frac{t}{2}}\right). \quad (3.41)$$

Les rapports $P_0^b(x; t)/Z_t(b)$ définissent une famille de distributions normalisées pour la limite du continu de la marche perturbée. Les graphes ci-dessous illustrent l'évolution temporelle de ces distributions, dans les deux cas $b > 0$ et $b < 0$, par rapport à celle des distributions non-perturbées (en pointillé).



Figure 5: Les courbes pointillées montrent l'évolution temporelle de la distribution (normalisée) de position de la marche non-perturbée, pour les temps $t = 0.1, 0.5$ et $t = 5$. (a) Les courbes pleines à gauche montrent l'évolution de la distribution correspondant à la perturbation par $b = +1$, et pour les mêmes valeurs de t . La courbe du bas, correspondant à $t = 5$, se confond déjà avec la courbe asymptotique pour $t \rightarrow \infty$. (b) Les courbes pleines de droite représentent les distributions pour $b = -1$, toujours pour les mêmes valeurs de t . Lorsque t augmente, la courbe pleine s'aplatit et devient identiquement nulle pour $t = +\infty$.

On y voit nettement l'effet attractif ou répulsif de la perturbation à l'origine. La forme de la distribution pour $t \rightarrow +\infty$ montre clairement la différence des deux régimes. La perturbation est bien relevante en $d = 1$: n'importe quelle valeur $b \neq 0$ induit des changements fondamentaux dans les propriétés de la marche.

On peut s'en faire une meilleure idée en calculant la valeur asymptotique pour t grand de certaines quantités révélatrices. Nous aurons besoin pour cela du développement asymptotique de la fonction $\operatorname{erfc}(z)$ pour des valeurs de z réelles

$$\operatorname{erfc}(z) = \begin{cases} \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} + \dots & \text{pour } z \text{ grand positif,} \\ 2 + \dots & \text{pour } z \text{ grand négatif.} \end{cases} \quad (3.42)$$

On trouve ainsi le comportement suivant de la fonction de partition suivant le signe de

la constante de couplage:

$$\begin{cases} b > 0 : & Z_t(b) = 2 e^{\frac{b^2 t}{2}} + \dots & \text{(cas attractif)} \\ b < 0 : & Z_t(b) = \frac{1}{|b|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \dots & \text{(cas répulsif)} \end{cases} \quad (3.43)$$

On en déduit immédiatement les distributions asymptotiques normalisées, dans les deux régimes:

$$\begin{cases} b > 0 : & \frac{P_0^b(x; t)}{Z_t(b)} = \frac{b}{2} e^{-b|x|} + \dots & \text{(cas attractif)} \\ b < 0 : & \frac{P_0^b(x; t)}{Z_t(b)} = \begin{cases} \frac{|x|}{2t} e^{-x^2/2t} + \dots & \text{pour } x \neq 0, \\ \frac{1}{2|b|t} + \dots & \text{pour } x = 0. \end{cases} & \text{(cas répulsif)} \end{cases} \quad (3.44)$$

L'accrochage est clair dans le cas attractif: la probabilité de retour en 0 ne décroît plus avec le temps, mais tend vers une constante. Dans le cas répulsif, la probabilité de retour décroît plus rapidement que pour la marche non-perturbée (où elle est en $\frac{1}{\sqrt{t}}$). Pour ce qui est du cas attractif, le résultat ci-dessus est exactement celui que l'on obtient en prenant la limite d'échelle de la distribution asymptotique dans le discret, donnée en (3.24) (exercice).

On peut calculer la fraction de temps passé à l'origine (l'énergie interne)

$$u(b) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{d}{db} \log Z_t(b) = \begin{cases} b & \text{si } b > 0, \\ 0 & \text{si } b \leq 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

qui est à nouveau le résultat que l'on trouve en prenant la limite du continu de l'expression discrète obtenue à l'équation (3.21).

L'accrochage peut aussi être clairement mis en évidence par le calcul du second moment de la distribution normalisée. En utilisant les distributions asymptotiques données en (3.44), on a de suite, pour t grand,

$$\begin{cases} b > 0 : & \langle \omega_t^2 \rangle = \frac{2}{b^2} + \dots & \text{(cas attractif)} \\ b < 0 : & \langle \omega_t^2 \rangle = 2t + \dots & \text{(cas répulsif)} \end{cases} \quad (3.46)$$

Dans le cas répulsif, la marche reste diffusive (i.e. le deuxième moment croît linéairement avec t) mais avec un coefficient de diffusion plus élevé que pour la marche standard (2 au lieu de 1), en rapport bien sûr avec ses retours moins fréquents à l'origine. Par contre, dans le cas attractif, le second moment reste borné dans le temps, ce qui implique que la distribution asymptotique reste très concentrée à l'origine.

3.4 ANALYSE EN ÉCHELLES: RENORMALISATION

Les calculs de la section précédente fournissent des résultats très explicites, mais restent confinés à la dimension $d = 1$. Dès que $d \geq 2$, des singularités apparaissent dans chaque terme du développement en série. Faisant abstraction de ces singularités, et même si les calculs explicites restaient praticables en dimension supérieure, une méthode qui permettrait de mettre en évidence l'existence de différentes phases (accrochage ou non), et d'estimer les comportements asymptotiques dans les différents régimes, serait très appréciable par rapport à une approche toute analytique, forcément lourde. Elle serait peut-être moins explicite, mais elle serait par contre beaucoup plus puissante.

L'idée de cette méthode —appelée méthode du groupe de renormalisation et dont l'utilité est universelle, ce qui ne gâche rien !— est de reprendre l'idée des changements d'échelle de la section 2, et de l'implémenter concrètement au niveau des quantités qui nous intéressent. Plus précisément, l'idée de base est d'isoler les effets se produisant sur un domaine $[0, X]$ fixé d'échelles de temps (tout ce qui se passe sur des périodes de temps comprises entre 0 et X), et d'absorber leur contribution dans une redéfinition des paramètres du modèle. Ensuite de voir ce qui se passe lorsqu'on augmente X .

Pour éviter momentanément le problème des singularités, nous commencerons par examiner le cas $d < 2$ (d apparaît comme un paramètre auquel on peut donner toutes les valeurs réelles positives). L'équation (3.36), adaptée à une dimension d quelconque, donne la transformée de Fourier de la distribution $P_0^b(x; t)$ en dimension d :

$$I(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \int_0^{\infty} dt_1 \dots dt_n \chi_0(t - \sum_i t_i) \left(\prod_{i=1}^n (2\pi t_i)^{-d/2} \right) e^{-\frac{k^2}{2}(t - \sum_i t_i)}. \quad (3.47)$$

Toutes les intégrales sont parfaitement convergentes si $d < 2$.

Appelons $I^{(n)}$ le coefficient de b^n , c'est-à-dire l'intégrale n -uple sur le domaine $D = \{t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0 : \sum_i t_i \leq t\}$. On peut séparer la partie de D qui se rapporte à la région où certaines des variables t_i sont petites, et écrire D_R pour la partie complémentaire:

$$\begin{aligned} D = D_R &+ [\{t_1 \sim 0\} \cup \dots \cup \{t_n \sim 0\}] \\ &- [\{t_1, t_2 \sim 0\} \cup \{t_1, t_3 \sim 0\} \cup \dots \cup \{t_{n-1}, t_n \sim 0\}] \\ &+ [\{t_1, t_2, t_3 \sim 0\} \cup \{t_1, t_3, t_4 \sim 0\} \cup \dots] - \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

où l'ensemble $\{t_1, t_2, \dots, t_k \sim 0\}$ est la partie de D où t_1, \dots, t_k sont petites, les autres variables prenant les valeurs qu'elles veulent (dans D). De plus on décide que $t_i \sim 0$ signifie que t_i est plus petit qu'une certaine échelle X , fixe pour l'instant. Par construction, D_R est le domaine $\{t_1, \dots, t_n \geq X, \sum_i t_i \leq t\}$.

Du fait que l'intégrand donnant $I^{(n)}$ est symétrique dans tous les t_i , on en déduit immédiatement que

$$\int_D \left(\prod_{i=1}^n (2\pi t_i)^{-d/2} \right) e^{-\frac{k^2}{2}(t - \sum_i t_i)} = \int_{D_R(X)} \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \int_{\{t_1, \dots, t_j \leq X\}} \dots \quad (3.49)$$

Le terme qui comprend l'intégrale sur D_R correspond au terme d'ordre n initial privé des contributions venant d'échelles plus petites ou égales à X . Ce n -ème terme soustrait dépend bien sûr de X .

En fait, et pour les besoins de la cause, on va procéder à une soustraction légèrement différente. Dans le terme où les j variables t_1, t_2, \dots, t_j sont petites ($\leq X$), on approxime la partie régulière de l'intégrand par sa valeur en $t_1 = \dots = t_j = 0$, ce qui met les termes de soustraction sous la forme

$$\int_0^X dt_1 \dots dt_j \int_0^\infty dt_{j+1} \dots dt_n \chi_0(t - \sum_{i>j} t_i) \left(\prod_{i=1}^n (2\pi t_i)^{-d/2} \right) e^{-\frac{k^2}{2}(t - \sum_{i>j} t_i)}. \quad (3.50)$$

On définit maintenant le n -ème terme soustrait $I_R^{(n)}$ comme étant le terme $I^{(n)}$ initial moins les termes soustraits que l'on vient de définir. Cette quantité $I_R^{(n)}$ ne correspond donc pas exactement à l'intégrale sur le domaine D_R .

On dira que $I_R^{(n)}$ est le terme d'ordre n renormalisé, en raison du fait qu'il ne contient plus les contributions dominantes provenant de petites échelles.

Soustrayant les quantités (3.50), on peut observer que les intégrales sur t_1, \dots, t_j se découplent de toutes les autres, qui, quant à elles, redonnent simplement $I^{(n-j)}$,

$$\begin{aligned} I^{(n)} - I_R^{(n)} &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \int_0^\infty \frac{\left(\prod_{i \leq j} \chi_0(X - t_i) \right) \chi_0(t - \sum_{i>j} t_i)}{\prod_{i=1}^n (2\pi t_i)^{d/2}} e^{-\frac{k^2}{2}(t - \sum_{i>j} t_i)} \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \left[\int_0^X \frac{dt_1}{(2\pi t_1)^{d/2}} \right]^j I^{(n-j)}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En dimension $d < 2$, l'intégrale sur t_1 converge et vaut

$$P \equiv \int_0^X \frac{dt_1}{(2\pi t_1)^{d/2}} = \frac{X^\epsilon}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}, \quad \epsilon = 1 - \frac{d}{2}. \quad (3.52)$$

Il se passe donc la chose intéressante que la renormalisation à l'ordre n modifie les coefficients des ordres inférieurs. Comme tous ces coefficients multiplient des puissances du couplage b , ça aura l'effet espéré de redéfinir b . Plus précisément, l'équation ci-dessus montre que

$$b^n I^{(n)} = b^n I_R^{(n)} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n+1-m} \binom{n}{m} b^n P^{n-m} I^{(m)}. \quad (3.53)$$

Renormaliser le niveau n revient donc à redéfinir les coefficients de tous les termes de niveau inférieur. Les niveaux inférieurs doivent eux-mêmes être renormalisés et vont de ce fait affecter les coefficients des niveaux qui leur sont inférieurs, et ainsi de suite ! La renormalisation complète, à tous les ordres, implique une cascade infinie de redéfinitions de coefficients qu'il faut tâcher de contrôler.

Il est plus commode pour cela d'adopter le point de vue inverse, et de calculer les contributions que reçoit un niveau de tous les niveaux qui lui sont supérieurs.

D'après la formule précédente, la renormalisation du niveau $n + N$ modifie le coefficient b^n du niveau n , par un terme égal à

$$b^{n+N} \times (-1)^{N+1} \binom{n+N}{n} P^N. \quad (3.54)$$

Le coefficient du niveau n reçoit aussi une contribution du niveau $n + N$ à cause d'une double renormalisation: le niveau $n + N$ affecte un niveau intermédiaire entre $n + N$ et n , qui lui-même affecte le niveau n . Pour $N = k_1 + k_2$, le niveau $n + N$ peut affecter le niveau $n + k_2$ (on "descend" de k_1 niveaux), qui à son tour affecte le niveau n (on descend de k_2 niveaux). La contribution que reçoit le niveau n de cette double renormalisation est le produit des deux contributions intermédiaires,

$$b^{n+N} \times \left[(-1)^{k_1+1} \binom{n+N}{n+k_2} P^{k_1} \right] \times \left[(-1)^{k_2+1} \binom{n+k_2}{n} P^{k_2} \right] \quad (3.55)$$

Le préfacteur b^{n+N} indique que la contribution est bien un effet de la renormalisation en cascade du niveau $n + N$, et de celui-là seulement. Autrement dit, on n'a renormalisé du niveau $n + k_2$ que la partie qui descendait directement du niveau $n + k_1 + k_2$.

De la même façon, et pour $N = k_1 + k_2 + k_3$, une triple renormalisation $n + N \rightarrow n + k_2 + k_3 \rightarrow n + k_3 \rightarrow n$ (i.e. des sauts de k_1 , puis de k_2 puis de k_3 niveaux) amène un terme

$$b^{n+N} \times (-1)^{N+3} \binom{n+N}{n+k_2+k_3} \binom{n+k_2+k_3}{n+k_3} \binom{n+k_3}{n} P^N. \quad (3.56)$$

La contribution totale du niveau $n + N$ au niveau n vaut la somme des effets des renormalisations multiples, paramétrées par les partitions de N :

$$\begin{aligned} & b^{n+N} P^N \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k_1+\dots+k_p=N \\ k_i \geq 1}} (-1)^{N+p} \binom{n+N}{n+k_2+\dots+k_p} \times \\ & \quad \binom{n+k_2+\dots+k_p}{n+k_3+\dots+k_p} \binom{n+k_3+\dots+k_p}{n+k_4+\dots+k_p} \dots \binom{n+k_p}{n} \\ & = b^n (-bP)^N \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k_1+\dots+k_p=N \\ k_i \geq 1}} (-1)^p \frac{(n+N)!}{k_1! k_2! \dots k_p! n!} \\ & = \binom{n+N}{n} b^n (-bP)^N \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k_1+\dots+k_p=N \\ k_i \geq 1}} (-1)^p \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_p!} \\ & = \binom{n+N}{n} b^n (bP)^N. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La dernière égalité, qui effectue la somme sur les partitions, est prouvée en fin de section.

La renormalisation de tous les niveaux $n + N > n$ modifie le coefficient b^n du niveau n d'une quantité égale à la somme des termes ci-dessus, de sorte que le coefficient devient

$$b^n I^{(n)} \longrightarrow \left[b^n + \sum_{N=1}^{\infty} \binom{n+N}{n} b^n (bP)^N \right] I_{\text{R}}^{(n)} = \frac{b^n}{(1-bP)^{n+1}} I_{\text{R}}^{(n)}, \quad (3.58)$$

où on a pu substituer $I_{\text{R}}^{(n)}$ à $I^{(n)}$ puisque la renormalisation du niveau n n'affecte pas le niveau n lui-même, mais bien les niveaux qui lui sont strictement inférieurs.

Pour la quantité $I(k; t)$ elle-même, on obtient donc

$$I(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n I^{(n)}(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(1-bP)^{n+1}} I_{\text{R}}^{(n)}(k; t), \quad (3.59)$$

ou de façon plus élégante,

$$bI(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{1-bP} \right)^{n+1} I_{\text{R}}^{(n)}(k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\text{R}}^{n+1} I_{\text{R}}^{(n)}(k; t) \equiv b_{\text{R}}(X) I_{\text{R}}(k; t|X). \quad (3.60)$$

Considérer $I(k; t)$ ou $bI(k; t)$ ne fera en pratique aucune différence puisque toutes les quantités normalisées que l'on peut souhaiter calculer sont des quotients de I , et donc de bI .

L'équation précédente est la base de toute méthode de renormalisation: elle montre comment l'élimination de certaines échelles s'accompagne d'une redéfinition du couplage, et détermine la valeur du nouveau couplage en fonction de l'échelle,

$$b_{\text{R}}(X) = \frac{b}{1-bP(X)}, \quad P(X) = \frac{X^\epsilon}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}. \quad (3.61)$$

Que se passe-t-il si $d \geq 2$?? La situation se complique légèrement puisque des singularités apparaissent de façon inévitable (en tout cas dans le traitement perturbatif que l'on a effectué). Revenons un instant au cas $d < 2$. Dans une notation symbolique, ce que l'on a fait peut être décrit par la décomposition suivante des différents termes du développement perturbatif:

$$\begin{aligned} I^{(n)}(0 \rightarrow t) &= [I^{(n)}(0 \rightarrow t) - I^{(n)}(0 \rightarrow X)] + I^{(n)}(0 \rightarrow X) \\ &= I_{\text{R}}^{(n)}(X \rightarrow t) + I^{(n)}(0 \rightarrow X), \end{aligned} \quad (3.62)$$

où sont indiqués les domaines d'échelles de temps dont dépendent les quantités. Toutes ces quantités étaient finies et menaient directement à la renormalisation de la série entière

$$bI(0 \rightarrow t) = b_{\text{R}} I_{\text{R}}(X \rightarrow t). \quad (3.63)$$

Lorsque $d \geq 2$, cette décomposition n'a plus de sens puisque tous les termes de soustraction $I^{(n)}(0 \rightarrow X)$ sont infinis. Ils pourraient être régularisés en les remplaçant par $I^{(n)}(t_0 \rightarrow X)$ pour un certain $t_0 > 0$. Dans ce cas, c'est la théorie soustraite $I^{(n)}(0 \rightarrow X) - I^{(n)}(t_0 \rightarrow X)$ qui serait infinie puisqu'elle contiendrait toujours les contributions provenant des échelles proches de 0.

On voit que c'est la théorie elle-même qui doit être régularisée, avant de pouvoir être renormalisée. On introduit dans ce but un cut-off ultraviolet⁹ t_0 , dont le rôle sera de retirer, artificiellement, les effets (divergents) dus aux très courtes échelles de temps (jusqu'à t_0). On prend donc comme point de départ de l'analyse la théorie régularisée,

$$I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow t) \equiv I^{(n)}(0 \rightarrow t) - I^{(n)}(0 \rightarrow t_0). \quad (3.64)$$

Cette soustraction peut se faire simplement en remontant de 0 à t_0 la borne inférieure de toutes les intégrales sur les t_i .

La conséquence directe de la régularisation est d'introduire un paramètre physique supplémentaire t_0 , en plus du paramètre original b . On voit bien que les divergences en $t_i \sim 0$ sont dues à des retours répétés à l'origine à des moments très proches. Elles n'apparaissent pas dans le formalisme discret, car le temps y est discret. L'unité de temps étant indivisible, rien ne peut se passer plus rapidement que cette unité; il y a donc un cut-off ultraviolet naturel, fourni par la discrétisation du temps. Le paramètre t_0 rétablit (artificiellement) cette limite, puisque sa signification physique est d'empêcher les retours à l'origine endéans des temps plus courts que t_0 .

Pour la théorie régularisée, on peut procéder à la renormalisation exactement comme il a été fait précédemment,

$$\begin{aligned} I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow t) &= [I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow t) - I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow X)] + I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow X) \\ &= I_{\text{rég,R}}^{(n)}(X \rightarrow t) + I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow X), \end{aligned} \quad (3.65)$$

et réabsorber les contributions $I_{\text{rég}}^{(n)}(t_0 \rightarrow X)$ dans la constante de couplage.

A partir d'ici, la renormalisation est strictement identique à ce que l'on a fait plus haut pour $d < 2$, sauf que la quantité que l'on avait appelée P , est maintenant donnée par

$$P \equiv \int_{t_0}^X \frac{dt_1}{(2\pi t_1)^{d/2}} = \frac{X^\epsilon - t_0^\epsilon}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}. \quad (3.66)$$

Elle modifie d'autant la renormalisation de la constante de couplage.

⁹Les termes infrarouge et ultraviolet désignent respectivement le domaine de basses et hautes fréquences (ou impulsions). Par extension, on utilise fréquemment ces termes pour désigner les régimes de la variable conjuguée, temps ou espace. Le passage aux variables conjuguées s'accompagne d'une inversion des régimes, si bien que ultraviolet désigne le régime des très courts instants, et infrarouge signifie longs temps (ou grandes distances). Dans le même ordre d'idée, le mot anglais *cut-off* (en français, coupure ou seuil) exprime bien l'idée sous-jacente, qui est de supprimer tous les effets au-delà, ou en-deça, d'une certaine échelle.

On arrive ainsi à la conclusion importante que *la théorie initiale de paramètre de perturbation b (et de cut-off t_0 si $d \geq 2$), est équivalente à une théorie renormalisée, considérée à une valeur de paramètre b_R , donnée par*

$$b_R = \frac{b}{1 - b \frac{X^{\epsilon - t_0^\epsilon}}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}}, \quad (\epsilon = 1 - \frac{d}{2}). \quad (3.67)$$

Dans la théorie renormalisée, les fluctuations d'échelles inférieures à X ont été supprimées, et leur contribution a été transférée dans une redéfinition de la constante de couplage $b \rightarrow b_R$.

La section suivante montre comment exploiter la présence de cette échelle X arbitraire, et la modification du couplage qu'une variation de sa valeur entraîne.

Le calcul de la série finie

$$f_N = \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_p = N \\ k_i \geq 1}} (-1)^p \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_p!} = (-1)^N, \quad (3.68)$$

est élémentaire si on s'y prend convenablement. Effectivement, la fonction génératrice des f_N est une façon compliquée d'écrire une exponentielle !! De fait on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{f_N}{N!} x^N = \sum_{N=1}^{\infty} x^N \sum_{p=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 1} (-1)^p \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_p!} \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_p - N) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \sum_{N=p}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 1} \frac{x^N}{k_1! k_2! \dots k_p!} \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_p - N) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \sum_{k_1, \dots, k_p \geq 1} \frac{x^{k_1 + k_2 + \dots + k_p}}{k_1! k_2! \dots k_p!} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p [e^x - 1]^p = \frac{1}{1 + [e^x - 1]} - 1 = e^{-x} - 1. \end{aligned} \quad (3.69)$$

La valeur de f_N s'ensuit immédiatement.

3.5 COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

La section précédente a montré comment on peut "dépouiller" la marche perturbée de ses effets de courtes échelles en les intégrant dans un redéfinition (une renormalisation) de la constante de couplage $b \rightarrow b_R(X)$, qui dépend de l'échelle X en-deçà de laquelle les effets sont supprimés (et aussi du cut-off t_0 lorsqu'il est nécessaire).

Cette échelle X était jusque-là fixe mais arbitraire (entre t_0 et t tout de même). Etant intéressés dans les comportements asymptotiques, à grand t , de diverses quantités, nous pourrions faire grandir X de façon à éliminer les effets sur des échelles de plus en plus grandes. Il resterait les contributions sur des échelles asymptotiquement grandes, précisément celles

qui nous intéressent. Dans le même temps, la constante de couplage renormalisée $b_R(X)$ tendrait vers une valeur limite à grand X , valeur qui contrôlerait justement les comportements asymptotiques¹⁰.

Supposons donc que l'on s'intéresse à une quantité $\Gamma(x, t; b)$ et son comportement asymptotique à grand t . Les Γ qui nous intéressent sont le genre de quantités que l'on a examinées dans les calculs explicites en $d = 1$, c'est-à-dire la probabilité d'être en x au temps t , l'écart moyen au temps t , ... D'après les résultats de la section précédente, la quantité $\Gamma(x, t; b)$ est égale à celle calculée dans la théorie renormalisée (éventuellement régularisée par t_0), où elle dépend en plus d'une échelle X , $\Gamma(x, t; b, t_0) = \Gamma_R(x, t; b_R, t_0, X)$. Bien sûr, si Γ ne dépend pas explicitement de x (probabilité de retour en 0 par exemple), toutes les dépendances dans cette variable doivent être supprimées dans ce qui suit.

Pour une raison qui deviendra claire par après, une constante de couplage sans dimension s'avère plus commode à manipuler que b ou b_R . Nous utiliserons donc plutôt

$$g(b, t_0, X) \equiv \frac{b_R X^\epsilon}{(2\pi)^{d/2}} = \frac{b \frac{X^\epsilon}{(2\pi)^{d/2}}}{1 - b \frac{X^\epsilon - t_0^\epsilon}{\epsilon (2\pi)^{d/2}}}. \quad (3.70)$$

On peut faire deux observations cruciales à propos de $\Gamma_R(x, t; g, t_0, X)$. D'abord, sa valeur ne peut pas dépendre de l'échelle X que l'on a introduite arbitrairement:

$$\Gamma_R(x, t; g(b, t_0, X), t_0, X) = \Gamma_R(x, t; g(b, t_0, X'), t_0, X'). \quad (3.71)$$

Ensuite, on peut sans perte de généralité supposer que $\Gamma_R(x, t; g, t_0, X)$ possède une dimension, que l'on peut mesurer en échelle de temps. Effectivement, la définition de la limite d'échelle montre que les dimensions de toutes les variables x, t, b sont données en termes du paramètre d'échelle a . En éliminant a , les échelles de x et b sont données en termes de celle du temps. On a: $[t] = 1$, $[x] = \frac{1}{2}$ et $[b] = \frac{d}{2} - 1 = -\epsilon$. Supposer que Γ_R possède une dimension d_Γ implique donc que lorsqu'on dilate le temps par λ , Γ_R se dilate d'un facteur λ^{d_Γ} :

$$\Gamma_R(\sqrt{\lambda}x, \lambda t; g(b, t_0, X), \lambda t_0, \lambda X) = \lambda^{d_\Gamma} \Gamma_R(x, t; g(b, t_0, X), t_0, X). \quad (3.72)$$

Le couplage g n'a pas été dilaté, puisqu'il est sans dimension, ce qui revient à dire que $g(\lambda^{-\epsilon}b, \lambda t_0, \lambda X) = g(b, t_0, X)$. L'identité ci-dessus est une généralisation de la relation d'échelle (3.30), mais avec le grand avantage d'impliquer une nouvelle échelle X , arbitraire. Ce sera le secret de la méthode.

Dans la philosophie de la méthode expliquée plus haut, on mettra initialement X à une petite valeur, pour lui donner ensuite des valeurs de plus en plus grandes. Ceci fait simultanément évoluer la valeur du couplage g , ce qui définit un flot sur g . Lorsque X augmente et se rapproche de plus en plus de t , il nous reste une théorie sans plus aucune

¹⁰L'analogie vaut ce qu'elle vaut, mais c'est comme si on débarassait un signal de ses composantes de hautes fréquences (courtes échelles de temps), et cela de façon répétée. Ne resteraient que les modes de très basses fréquences, qui correspondent aux "tendances" du signal sur de très longues échelles de temps.

fluctuation, et qui correspond à une valeur du couplage qui aura atteint, ou presque, une valeur limite (du moins c'est ce qu'on espère).

Curieusement peut-être, le couplage atteint parfois sa valeur-limite bien avant que l'échelle X ne s'approche de t . Par exemple, pour $d < 2$ ($\epsilon > 0$), on peut sans danger mettre $t_0 = 0$, et voir que g tend vers $-\epsilon$ pour $X \rightarrow +\infty$ si $b < 0$, et par contre si $b > 0$, g tend vers plus l'infini lorsque X se rapproche de la valeur finie $[\frac{\epsilon(2\pi)^{d/2}}{b}]^{1/\epsilon}$ par valeurs inférieures.

Afin d'inclure ces cas-là, on appellera X^* l'échelle à laquelle g aura réellement atteint sa valeur limite g^* , par définition un point fixe du flot. Dans l'exemple précédent, $X^* = +\infty$ avec $g^* = -\epsilon$, ou $X^* = [\frac{\epsilon(2\pi)^{d/2}}{b}]^{1/\epsilon}$ avec $g^* = +\infty$. On voit en particulier que l'échelle $X^* = +\infty$ n'est pas accessible puisque X doit rester plus petite que t . Pour de grandes valeurs de t , l'échelle la plus proche de X^* à laquelle on peut se placer est donc

$$X_{\max} = \min(t, X^*). \quad (3.73)$$

On a essentiellement deux cas de figure: soit X^* est une échelle finie et $X_{\max} = X^*$ (on suppose t très grand), soit $X^* = +\infty$, et $X_{\max} = t$ est très grande, proche de X^* . Dans les deux cas, X_{\max} est très proche de X^* , et définit une valeur du couplage g_{\max} , très proche d'un point fixe g^* .

Prenant donc $X = X_{\max}$, et en utilisant l'homogénéité de Γ (avec $\lambda = \frac{1}{t}$), on trouve

$$\Gamma(x, t; b, t_0) = \Gamma_{\text{R}}(x, t; g_{\max}, t_0, X_{\max}) = t^{d_{\Gamma}} \Gamma_{\text{R}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1; g_{\max}, \frac{t_0}{t}, \frac{X_{\max}}{t}\right). \quad (3.74)$$

C'est l'équation fondamentale sur laquelle repose toute l'analyse des comportements asymptotiques; elle montre clairement que ceux-ci sont contrôlés par le voisinage des points fixes g^* .

La façon dont la constante de couplage évolue lorsque l'échelle X grandit peut être décrite par la fonction beta, une quantité sans dimension définie par

$$\beta(g) \equiv X \frac{d}{dX} g(b, t_0, X). \quad (3.75)$$

Pour la constante de couplage donnée en (3.70), on trouve simplement

$$\beta(g) = \epsilon g + g^2. \quad (3.76)$$

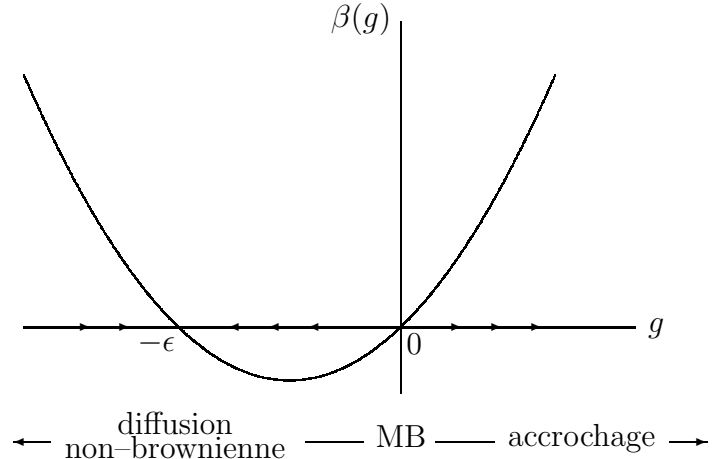
Les points fixes correspondent aux racines finies de la fonction beta, c'est-à-dire $g^* = 0, -\epsilon$, et potentiellement aux valeurs infinies de g , lorsque le flot entraîne g vers des valeurs infinies.

3.5.1 Basses dimensions $d < 2$

Commençons par considérer les dimensions que l'on a déjà examinées, au moins partiellement ($d = 1$). On peut mettre $t_0 = 0$ (et supprimer toutes les dépendances dans cette variable).

Le flot de la constante de couplage est visualisé en traçant le graphe de la fonction beta. Lorsque l'échelle X augmente, le couplage g augmente là où la fonction beta est positive, et il décroît là où elle est négative. Dans le cas présent $\epsilon > 0$, on voit que g tend vers le point fixe stable $g^* = -\epsilon$ sur tout l'axe négatif, alors que g tend vers $g^* = +\infty$ sur l'axe positif. L'origine $g^* = 0$ est un point fixe instable. Si on considère le flot pour des échelles X qui diminuent, les comportements s'inversent de sorte que $g^* = 0$ devient un point fixe stable dans la limite $X \rightarrow 0$. On dira que $g^* = 0$ est un point fixe ultraviolet, car il correspond aux petites échelles de temps (hautes fréquences), et que $g^* = -\epsilon$ et $g^* = +\infty$ sont des points fixes infrarouges, correspondant aux grandes échelles de temps. Ce sont bien sûr eux qui nous intéresseront.

Effectivement, si le paramètre de perturbation $b < 0$ est négatif, le flot "démarré" dans le voisinage négatif de l'origine (X est d'abord petit), et le flot amène g vers le point fixe $g^* = -\epsilon$. Si par contre $b > 0$ est positif, on démarre d'un point proche de l'origine sur l'axe positif, et dans ce cas g ne cesse de croître pour atteindre $g^* = +\infty$. Ce sont donc ces deux points fixes qui vont contrôler les comportements asymptotiques, respectivement dans les deux régimes, répulsif et attractif.



Mettons-nous d'abord dans le régime répulsif, $b < 0$. Comme mentionné plus haut, la constante de couplage ne prend réellement sa valeur limite $g^* = -\epsilon < 0$ que lorsque l'échelle croît indéfiniment et atteint $X^* = +\infty$. L'équation (3.74) donne alors, avec $X_{\max} = t$,

$$\Gamma(x, t; b) = t^{d_{\Gamma}} \Gamma_{\text{R}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1; g_{\max}, 1\right), \quad (3.77)$$

avec $g_{\max} = g(b, 0, t)$ le couplage à l'échelle t .

Comme t est grand, $g_{\max} \sim -\epsilon$ est proche de la valeur de point fixe, de sorte que l'on peut effectuer un développement de Taylor autour de $\frac{1}{t} = 0$. On trouve, en ne retenant que la première correction à la valeur de point fixe,

$$g_{\max} = \frac{b \frac{t^{\epsilon}}{(2\pi)^{d/2}}}{1 - b \frac{t^{\epsilon}}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}} = \frac{-\epsilon}{1 - \epsilon \frac{(2\pi)^{d/2}}{bt^{\epsilon}}} = -\epsilon - \epsilon^2 \frac{(2\pi)^{d/2}}{bt^{\epsilon}} + \dots \quad (3.78)$$

Insérant ceci dans l'expression de Γ , et effectuant cette fois un développement de Γ , on obtient

$$\Gamma(x, t; b) = t^{d_{\Gamma}} \left\{ \Gamma_{\text{R}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1; g^*, 1\right) - \epsilon^2 \frac{(2\pi)^{d/2}}{bt^{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial g} \Gamma_{\text{R}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1; g^*, 1\right) + \dots \right\}, \quad (3.79)$$

c'est-à-dire un développement asymptotique, de la forme

$$\Gamma(x, t; b) = t^{d_\Gamma} a_0\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{t^{d_\Gamma - \epsilon}}{b} a_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{O}(t^{d_\Gamma - 2\epsilon}), \quad (3.80)$$

où les fonctions a_0 et a_1 (et toutes les autres si on poursuit le développement) sont des fonctions de la seule variable $\frac{x}{\sqrt{t}}$ (qui est sans dimension). Pour t grand, le comportement asymptotique de Γ est donc dominé par le premier terme, sauf si a_0 est identiquement nulle, et dans ce cas, c'est le deuxième terme qui est dominant (et ainsi de suite avec les termes suivants du développement).

A moins qu'il n'y ait une très bonne raison pour cela, dictée par la nature de la quantité que l'on regarde, on ne doit pas attendre que a_0 , comme fonction, s'annule pour tout x . Par contre, lorsque Γ ne dépend pas de x , a_0, a_1, \dots deviennent des constantes numériques, et on est en droit de se poser la question de leur nullité. La méthode elle-même ne dit rien à ce propos, et on devra le plus souvent recourir à des arguments "physiques". C'est ce que l'on va voir dans des exemples concrets. Nous prendrons pour Γ les quatre quantités que l'on a calculées explicitement en $d = 1$, à savoir la fonction de partition, l'écart quadratique moyen de la distribution de position, la probabilité de retour à l'origine, et finalement la distribution de position elle-même. Nous aurons ainsi le loisir de faire toutes les comparaisons voulues.

La fonction de partition est la normalisation de la distribution $P_0^b(x; t)$. Elle n'a pas de dimension. On a cependant vu dans la section précédente que notre schéma de renormalisation fonctionnait bien pour $bP_0^b(x; t)$, et donc pour $bZ_t(b)$ plutôt que pour $P_0^b(x; t)$ et $Z_t(b)$. Considérant donc $bZ_t(b)$, de dimension $d_\Gamma = -\epsilon = \frac{d}{2} - 1$, on obtient le comportement asymptotique

$$bZ_t(b) \sim t^{-\epsilon}, \quad (3.81)$$

à une constante numérique a_0 près (indépendante de b !), que l'on a supposé non-nulle. On a donc

$$Z_t(b) \sim \frac{1}{bt^\epsilon}. \quad (3.82)$$

En $d = 1$ ($\epsilon = \frac{1}{2}$), on avait obtenu $Z_t(b) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|b|\sqrt{t}} + \dots$ en parfait accord avec le résultat ci-dessus.

L'écart quadratique moyen $\langle \omega_t^2 \rangle$ possède une dimension égale à 1, puisque la position de la marche a dimension $\frac{1}{2}$. On en déduit

$$\langle \omega_t^2 \rangle \sim t, \quad (3.83)$$

toujours si le nombre pur a_0 est non-nul. Contrairement au cas de la fonction de partition, qui n'a pas réellement de sens physique intrinsèque, on peut ici argumenter que $a_0 \neq 0$. En effet, si a_0 était nul, le second terme de (3.80), devenu dominant, impliquerait $\langle \omega_t^2 \rangle \sim$

$\frac{t^{1-\epsilon}}{b} = \frac{t^{d/2}}{b} < t$. L'écart quadratique moyen serait donc plus faible que pour la marche non-perturbée, et cela malgré la répulsion exercée par l'origine. L'écart moyen serait même d'autant plus faible que la répulsion de l'origine serait grande ! L'hypothèse $a_0 = 0$ n'est donc pas tenable. En $d = 1$, on avait trouvé $\langle \omega_t^2 \rangle = 2t + \dots$, avec un coefficient indépendant de b , comme prédit par la présente analyse.

La densité de probabilité $P_0^b(0; t)/Z_t(b)$ à l'origine a une dimension $-\frac{d}{2}$ (puisque c'est une densité, et que la mesure $d^d x$ a dimension $\frac{d}{2}$). Le terme dominant est en $a_0 t^{-d/2}$, c'est-à-dire le même comportement que pour le mouvement brownien. Cela reste en soi possible, mais ce résultat serait valide pour toute valeur de b négative, et en particulier pour $b \rightarrow -\infty$, pour laquelle la particule est interdite de retour à l'origine ! On conclut cette fois que a_0 est nul, et que c'est le terme en a_1 qui devient dominant (on n'a pas de raison de penser que lui aussi s'annule):

$$\frac{P_0^b(0; t)}{Z_t(b)} \sim \frac{1}{bt}. \quad (3.84)$$

Le calcul en $d = 1$ avait déterminé que $P_0^b(0; t)/Z_t(b) = \frac{1}{2|b|t} + \dots$

Finalement, la distribution $P_0^b(x; t)/Z_t(b)$ pour n'importe quelle valeur de x possède la même dimension $-\frac{d}{2}$, et se comporte donc comme $t^{-d/2} a_0(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Si on fait l'hypothèse raisonnable que $P_0^b(x; t)/Z_t(b)$ se comporte pour x pas trop grand (devant t) de la même façon que $P_0^b(0; t)/Z_t(b)$, c'est-à-dire en $\frac{1}{t}$, on trouve que $a_0(\frac{x}{\sqrt{t}}) \sim (\frac{x}{\sqrt{t}})^{2\epsilon}$, de sorte que

$$\frac{P_0^b(x; t)}{Z_t(b)} \sim \frac{|x|^{2-d}}{t}, \quad (3.85)$$

qui reproduit correctement le comportement en $d = 1$.

Insistons sur le fait que la méthode fournit le comportement asymptotique pour t grand de diverses quantités statistiques, en donnant non seulement la dépendance asymptotique en t , mais en détermine également la dépendance en b , et en x le cas échéant.

Voyons maintenant le cas attractif, $b > 0$. Le flot de la constante de couplage entraîne celle-ci vers des valeurs infinies positives. La grosse différence par rapport au cas répulsif est que le point fixe $g^* = +\infty$ est atteint pour une valeur finie de l'échelle, à savoir

$$X^* = \left[\frac{\epsilon(2\pi)^{d/2}}{b} \right]^{1/\epsilon}. \quad (3.86)$$

On a donc $X_{\max} = X^*$ et $g_{\max} = g^* = +\infty$, et l'équation (3.74) devient

$$\Gamma(x, t; b) = t^{d\Gamma} \Gamma_R\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1; g^*, \frac{X^*}{t}\right). \quad (3.87)$$

Que peut-on dire dans ce cas ? Le fait que le couplage g (et donc b_R) atteigne sa valeur limite à une échelle finie X^* suggère que la particule est accrochée, piégée par l'origine, à

cette échelle-là de temps. Elle est d'ailleurs d'autant plus petite que la perturbation est grande, ce qui conforte quelque peu ce point de vue. Dans cette perspective, la marche atteindrait son régime limite très rapidement, après un temps de l'ordre de X^* , après quoi les propriétés statistiques de la marche n'évoluent plus. Contrairement au cas répulsif (et brownien) où le régime limite est trivial (la distribution de position tend vers une distribution plate, nulle partout), et atteint d'une façon que nous avons déterminée plus haut, la marche dans le cas attractif atteindrait très rapidement son régime limite, qui serait stationnaire (par définition) et non-trivial.

Ce régime limite pourrait être caractérisé par l'équation ci-dessus, dans laquelle on remplace t par $X^* \sim b^{-1/\epsilon}$, ce qui donne

$$\Gamma(x, t; b) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} b^{-d_{\Gamma}/\epsilon} f_{\Gamma}(b|x|^{2\epsilon}), \quad (3.88)$$

pour une fonction f_{Γ} arbitraire.

Pour les deux quantités normalisées indépendantes de x , ce raisonnement prédit les dépendances en b de leur valeur asymptotique,

$$\langle \omega_t^2 \rangle \longrightarrow \frac{1}{b^{1/\epsilon}} \quad \text{et} \quad \frac{P_0^b(0; t)}{Z_t(b)} \longrightarrow b^{d/2\epsilon}, \quad (3.89)$$

entièrement confirmées par les calculs explicites en $d = 1$.

Pour la distribution de position, il reste une fonction arbitraire sur laquelle on ne sait rien dire:

$$\frac{P_0^b(x; t)}{Z_t(b)} \longrightarrow b^{d/2\epsilon} f(b|x|^{2\epsilon}), \quad (3.90)$$

mais dont la forme est en tous les cas consistante avec les résultats en $d = 1$.

Récapitulons l'influence de la perturbation localisée à l'origine. Pour une perturbation répulsive, le caractère diffusif de la marche est maintenu, mais les propriétés plus fines de la distribution de position sont altérées (p.e. les probabilités de retour). C'est le régime que l'on a qualifié de "diffusion non-brownienne" dans la figure. Par contre, pour une perturbation attractive et quelle que soit la valeur du paramètre b , la marche est complètement modifiée, et la particule reste accrochée à l'origine.

Autrement dit: *quelle que soit l'intensité (et le signe) de la perturbation, celle-ci est relevante et modifie profondément le déroulement de la marche. Les comportements asymptotiques sont contrôlés par deux points fixes du flot de renormalisation, tous deux distincts du point fixe $g^* = 0$, lui-même correspondant au mouvement brownien (point fixe "gaussien"). Le point $b = 0$ est donc un point de transition entre une phase diffusive non-brownienne et une phase accrochée.*

3.5.2 Hautes dimensions $d \geq 2$

Nous nous limiterons ici à quelques commentaires qualitatifs sur les flots. La théorie dépend du cut-off t_0 , qui doit être considéré comme un paramètre physique supplémentaire.

Revenons un instant sur la relation fixant le couplage renormalisé b_R ,

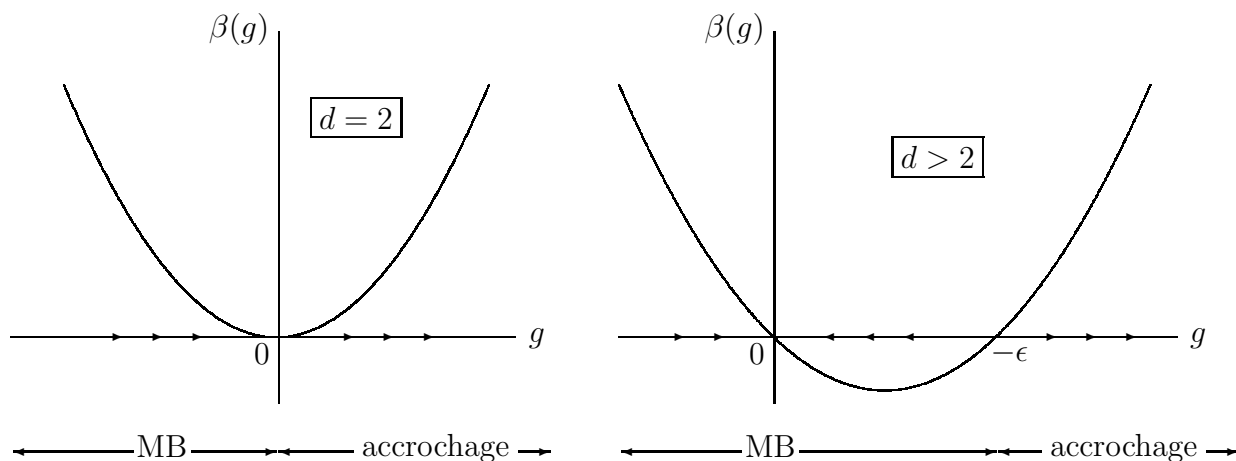
$$b_R = \frac{b}{1 - b \frac{X^\epsilon - t_0^\epsilon}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}}, \quad (\epsilon = 1 - \frac{d}{2} \leq 0). \quad (3.91)$$

Alors qu'en $d < 2$, b était bien la valeur initiale du couplage, c'est-à-dire le couplage pour une échelle $X = 0$ nulle, on constate maintenant que b acquiert un autre sens, et qu'il doit être considéré comme le couplage à l'échelle $X = t_0$. Plus précisément, on devrait écrire la relation précédente sous la forme

$$b_R = \frac{b_0}{1 - b_0 \frac{X^\epsilon - t_0^\epsilon}{\epsilon(2\pi)^{d/2}}}, \quad (3.92)$$

où b_0 est un certain couplage initial, correspondant à l'échelle minimale accessible, à savoir le cut-off lui-même, $b_0 = b_R(X = t_0)$. On remplace ainsi le paramètre b original au profit d'un nouveau paramètre physique b_0 . C'est en quelque sorte "juste" un changement de condition initiale: plutôt que de commencer le flot de renormalisation avec le couplage b à l'échelle $X = 0$, on le fait démarrer du couplage b_0 à l'échelle $X = t_0$. Ce changement n'est pas du tout innocent et en réalité camoufle des infinités, car selon la technique de la section 4, b_0 est la valeur effective du couplage que l'on obtient en intégrant tous les effets d'échelles de temps inférieures à t_0 . Mais ces effets ont des contributions divergentes pour $d \geq 2$ (reliées à la quantité qu'on appelait P), ce qui rend la relation entre b_0 et b singulière.

En dimension $d = 2$, c'est-à-dire $\epsilon = 0$, la fonction $\beta(g) = g^2$ possède une racine double à l'origine. On se représente facilement le flot de renormalisation par le graphe de $\beta(g)$.



On y voit que pour $b_0 < 0$, le couplage à grande échelle tend vers le point fixe (semi-stable) $g^* = 0$. Les comportements asymptotiques du régime répulsif seront donc universels

(indépendants de b_0), et contrôlés par le point fixe du mouvement brownien (point fixe gaussien). La perturbation répulsive n'a donc aucun effet sur le comportement asymptotique de la marche.

Lorsque $b_0 > 0$, le couplage tend vers le point fixe infini $g^* = +\infty$. La limite $\epsilon \rightarrow 0$ de la formule (3.92),

$$g(b_0, t_0, X) = \frac{\frac{b_0}{2\pi}}{1 - \frac{b_0}{2\pi} \log \frac{X}{t_0}}, \quad (3.93)$$

montre que la constante de couplage diverge à une échelle finie, donnée par $X^* = t_0 e^{\frac{2\pi}{b_0}}$. L'interprétation en est la même qu'auparavant: cette échelle X^* fixe l'échelle de temps à laquelle la particule est accrochée, et à laquelle le régime asymptotique stationnaire est atteint.

En dimension $d > 2$, la fonction beta possède à nouveau deux racines distinctes, et donc deux points fixes finis. Le point fixe gaussien $g^* = 0$ est cette fois stable et contrôle toute la plage de couplage allant de $-\infty$ à l'autre point fixe $g^* = -\epsilon > 0$. De la formule (3.70), écrite sous la forme

$$g(b_0, t_0, X) = \frac{\epsilon X^\epsilon}{\frac{\epsilon(2\pi)^{d/2}}{b_0} + t_0^\epsilon - X^\epsilon}, \quad (3.94)$$

on peut voir que le bassin d'attraction $]-\infty, -\epsilon[$ du point fixe $g^* = 0$ correspond à des valeurs de paramètre de perturbation b_0 dans l'intervalle $]-\infty, b_{0,c}[$, avec $b_{0,c} = \frac{|\epsilon|(2\pi)^{d/2}}{t_0^\epsilon} > 0$. Par conséquent, pour toute valeur de b_0 plus petite que la valeur critique $b_{0,c}$, et cela comprend l'entièreté du régime répulsif et une partie du régime attractif, la marche ne subit aucune influence de la perturbation, qui est donc irrelevante. Les comportements asymptotiques sont universels, identiques à ceux du mouvement brownien.

Pour les valeurs de $b_0 > b_{0,c}$ supérieures à la valeur critique, le couplage diverge à une échelle finie, signalant à nouveau l'accrochage à une échelle de temps égale à $t_0 [1 - \frac{b_{0,c}}{b_0}]^{1/\epsilon}$. Comme en deux dimensions, le point $b_0 = b_{0,c}$, non-nul cette fois, est un point de transition entre une phase diffusive brownienne et une phase accrochée.

Exactement au point critique, $b_0 = b_{0,c}$, il se passe la chose curieuse que le couplage prend la valeur de point fixe $g^* = -\epsilon$ indépendamment de toute échelle ! Par conséquent, toute dépendance en X disparaît: il y a invariance d'échelle.

En conclusion, on obtient des résultats semblables pour les dimensions supérieures ou égales à 2: *il existe un point de transition $b_{0,c} \geq 0$ entre une phase diffusive brownienne, avec comportements universels, et une phase accrochée. Le point critique $b_0 = b_{0,c}$, nul en deux dimensions, strictement positif sinon, est invariant d'échelle.*

1. Appliquer la théorie de Perron–Frobenius aux matrices considérées à la section 1. Pour tout N fixé, montrer que $T(\beta)|_{\mathcal{C}_N}$ est irréductible, qu’elle n’est pas primitive, mais que son carré est la somme directe de deux matrices primitives. Par le théorème de Perron–Frobenius, en déduire qu’au plus deux valeurs propres de $T(\beta)|_{\mathcal{C}_N}$ ont même norme $|\lambda_{\max}|$, qu’elles sont toutes deux réelles et non-dégénérées, et que la valeur propre maximale positive est une fonction strictement croissante de β .
(La théorie de Perron–Frobenius représente tout un ensemble de résultats extrêmement puissants et utiles sur les matrices finies non-négatives (dont les éléments de matrice sont réels positifs ou nuls). Une bonne référence est le livre de H. Minc, “Nonnegative matrices”, déjà mentionné plus tôt. On pourra y trouver les définitions de matrice irréductible et primitive.)
2. L’équation (3.24) donne l’expression explicite, dans le discret, de la distribution asymptotique de la position du marcheur dans le cas attractif, en une dimension. Prendre la limite d’échelle de cette expression, et montrer que l’on retrouve exactement le résultat (3.44), dérivé dans le continu.
3. Adapter les calculs de la fin de la section 1 ($d = 1$ dans le discret) et de la section 3 ($d = 1$ dans le continu) au cas où le point de départ n’est pas l’origine.
4. Vérifier que la relation d’échelle (3.30) est satisfaite par la distribution unidimensionnelle (3.40).
5. Considérer la fonction $I(\lambda)$ en $d = 2$, donnée en (3.18),

$$I(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2\lambda}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)}. \quad (3.95)$$

Effectuant une des deux intégrations (par résidus p.e.), obtenir $I(\lambda) = \frac{2}{\pi} K(\frac{1}{\lambda})$, où la fonction K (une intégrale elliptique) est définie par

$$K(p) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3.96)$$

Dans le cadre de la section 1, l’unique valeur propre $\lambda(\beta) > 1$ satisfait donc l’équation implicite $K(\frac{1}{\lambda}) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 - e^{-\beta}}$. Lorsque β est petit et positif, $\frac{1}{\lambda}$ est proche de 1 par valeurs inférieures, auquel cas $K(\frac{1}{\lambda}) \sim -\frac{1}{2} \log(1 - \frac{1}{\lambda^2})$. En déduire que $\lambda_{\max} \sim 1 + \frac{1}{2} e^{-\pi/\beta}$ est exponentiellement proche de 1, et en conclure que la fraction moyenne de temps passé à l’origine est exponentiellement petite $u(\beta) \sim \frac{\pi}{2\beta^2} e^{-\pi/\beta}$. Par comparaison, en $d = 1$, cette même fraction est linéairement petite, $u(\beta) \sim \beta$.